Chapter 4

回文の未解決問題からはじまる研究

4.1　未解決問題

古くから研究されている整数論の問題に回文問題がある．ある数を回文に変換する方法として有名なものは,「逆順加算」と呼ばれるものである．それを，例えば 23 で説明すると，23 の逆順である数 32 を並べて足すことである．すなわち，$23 + 32 = 55$ となり，回文 55 が得られる．68 であればどうであろう．しかし，$68 + 86 = 154$ で回文ではない．このような場合では，154 に再度，逆順加算を行う．しかし，$154 + 451 = 605$ である．もう一度行うと，$605 + 506 = 1111$ となり，回文に変換される．以上の操作をまとめると，

$$(1)\ 68 + 86 = 154 \rightarrow\ (2)\ 154 + 451 = 605, \rightarrow\ (3)\ 605 + 506 = 111$$

である．このことから，68 は 3 回の逆順加算で回文に変換されたことになる．以下の未解決問題が有名である．

問題「どんな数も有限回の逆順加算で回文に変換することができるか?」

未解決である理由となっている数の代表的なものに，196 がある．すなわち，この数は最初に出てくる有限回の逆順加算で回文に変換することができるかどうか未だ判定できていない数なのである．余談であるが，196 は

$196 = 14^2$ であり，逆順した 691 は素数である．数 196 を並べ換えた 961 については,

$$(1)\ 961 + 169 = 1130, \quad \rightarrow (2)\ 1130 + 0311 = 1441$$

の 2 回の逆順加算で回文に変換される．しかし，$961 = 31^2$ で $169 = 13^2$ であることは興味深い．3 桁で $(961, 169)$ と同じ構造を持つ数のペアは，この他に，$(144, 441)$ があり，$144 = 12^2$，$441 = 21^2$ となっている．これは 1 回の逆順加算で回文 585 に変換される．

また，別な余談になるが，明らかに 10 以下の回文の個数は 9 個であるが，10^2 以下の回文の個数は 18 個となる。さらに，10^3 以下の回文の個数は 108 個，10^4 以下の回文の個数は 198 個，10^5 以下の回文の個数は 1098 個，10^6 以下の回文の個数は 1998 個，10^7 以下の回文の個数は 10998 個と続いて行く。

さて，逆順加算の問題は，もし回文に変換されない数が存在するならば，その判定法は何かということになろう。しかし，196 のように回文に変換されるのかどうかわからない数があると，判定法の議論すら難しいということになる。

4.2 問題を捻る

M「逆順加算による回文の問題は，たいていの人が考えているので，回文に関して私たち独自の問題を作ろうよ」

ユウリ「それなら簡単です。ひっくり返して引けばいいんじゃないですか？」

M「良いアイディアですね。ユウリさん。早速やってみましょう。」

ユウリ「はーーい。1 桁は全部 0 になるので，2 桁からやってみまーす。

$$11 - 11 = 0,\ 12 - 21 = -9\ ???$$

いきなりつまづきました。マイナスになってしまいます。」

M「絶対値をとってみればどうでしょうか」

ユウリ「そうですね。ありがとうございまーす。」

$$|12-21|=9,\quad |13-31|=18 \to |18-81|=63 \to |63-36|=27$$
$$\to |27-72|=45 \to |45-54|=9,$$

ユウリ「ほおー。続けてみようお。」

$$|14-41|=27 \to |27-72|=45 \to |45-54|=9,$$
$$|15-51|=36 \to |36-63|=27 \to |27-72|=45 \to |45-54|=9,$$
$$|16-61|=45 \to |45-54|=9,$$
$$|17-71|=54 \to |54-45|=9,$$
$$|18-81|=63 \to |63-36|=27 \to |27-72|=45 \to |45-54|=9,$$
$$|19-91|=72 \to |63-36|=27 \to |27-72|=45 \to |45-54|=9,$$
$$|20-02|=18 \to |18-81|=63 \to |63-36|=27 \to |27-72|=45 \to |45-54|=9.$$

ユウリ「すっごーい。この方法だと，元が回文でなければ後は全部 9 になりまーす。」
M「全部って？」
ユウリ「あっ！　すいませーん。12 から 20 の数の全部です。」
M「ほんと？他も調べて結果を教えてください。」
ユウリ「わっかりやしたあ。」

$$|21-12|=9,$$
$$|23-32|=9,$$
$$|24-42|=18 \to |18-81|=63 \to |63-36|=27 \to |27-72|=45 \to |45-54|=9,$$
$$\cdots\ \cdots\cdots\cdots$$
$$|97-79|=18 \to |18-81|=63 \to |63-36|=27 \to |27-72|=45 \to |45-54|=9,$$
$$|98-89|=9.$$

ユウリ「やっぱり私の思った通り。。。。。ですけど。。。。次の 100 は 99 に変換されるんです。」

M「そうですか。」

ユウリ「あっ！　わかりました。回文以外の数は逆順減算で 2 桁は 9，3 桁は 99，4 桁は 999 という数に変換される。どうでしょう !!　好きな 3 桁の数を言ってみてください。」

M「じゃー 曰くつきの 196 でお願いします。」

ユウリ「見ててください。

$$|196 - 691| = 495 \to |495 - 594| = 99$$

どうでしょう。」

M「それでは 753」

ユウリ「わ・か・り・ま・し・た。

$$\begin{aligned} &|753 - 357| = 396 \to |396 - 693| = 297 \to |297 - 792| = 495 \\ &\to |495 - 594| = 99 \end{aligned}$$

ほらね。」

M「ユウリさんの言いたいことはわかりました。でも，予想をもっと簡単な形で書けませんか？」

4.3　回文の逆順減算予想

ユウリ「そうですね。桁とか回文とかといった条件で答えが変わるのが良くないですね。えーと。うむうむうむうむ。あっ。できました。これでどうでしょう。」

回文の逆順減算予想 どんな数も有限回の逆順減算で 0 となる。

M「表現がシンプルになってわかりやすくなりました。つまり，この予想もどんな数も回文に変換されて，そして最後に 0 になると言ってるのですね。」

4.4 6534 と 2178 のループ

ユウリ「やはり心配になったので，4 桁を調べてみました。そしたら，予想に反する数が現れたのです。それは 1012 です。

$$|1012 - 2101| = 1089 \to |1089 - 9801| = 8712 \to |8712 - 2178| = 6534$$
$$|6534 - 4356| = 2178 \to |2178 - 8712| = 6534 \to |6534 - 4356| = 2178$$

このように，1012 は 6534 と 2178 の 2 つの数をループするのです。」
M「そうですか。」
ユウリ「しかも 1012 のような予想を裏切る数がかなりたくさんあって。。。それで。。。もう少し聞いて貰えますか。」
M「どうぞ。」
ユウリ「さらに 5 桁も調べてみるとお。。。やっぱり，予想に反する数が現れたのです。その最初の数がなんと 10012 で，65934 と 21978 の 2 つの数をループするのです。」
M「ほお。。。6 桁はどうでしたか？」
ユウリ「まだ，調べていません。少し待って下さい。すぐにプログラムで分かりますから。えーっと。あれっ? 最初に予想に反する数は 100012 で，659934 と 219978 の 2 つの数をループしています。そっかあ。そうだったのか。確かにそうです。6 桁を少し見てみると，ループしている状況は，659934 と 219978 のループか，65934 と 21978 のループか，6534 と 2178 のループで，それ以外

は 0 となっているようです。7 桁を見てみると，やはり同様な結果が得られているようです。へーー。楽しいわ。。。」
M「結構，議論が進展してきましたね。他に何か気付くいいですね。」
ユウリ「特に気付くことは無いような。。。有るような。。。6534 と 2178 のループ 65934 と 21978 のループ。。。あっ！　$65+34=99$ で $21+78=99$ ですね。」この操作で 99 となるのか。。。。えーーーと。。。6534 と同じような数字で考えてみよう。た・と・え・ば，6534 に似ている数として，$12+87=99$ なので，1287 を考えてみる。やったー，$|1287-7821|=6534$ だ !! 」
M「おっ！　すばらしいですね。」
ユウリ「ちょっと待っててください。$|2376-6732|=4356$ で 6534 の反転数だからＯＫ。3465 だと $|3465-5643|=2178$。そうか 2178 は 6534 の友達だ。4554 は回文だから無視して，7821 は $|7821-1287|=6534$。そうか，1287 と 2178 は友達で，3465 と 4356 も友達，そして 7821 と 8712 が友達だから，これらも逆順減算で，6534 と 2178 のループに入る。」
M「少しずつ例外の特徴が見えてきましたね。」
ユウリ「そうですね。ありがとうございます。」

4.5　例外に着目

ユウリ「4 桁の逆順減算を全て調査した結果，やはり，0 に変換されないものは，全て 6534 と 2178 のループに変換されるという結果が出ました。そのリストは大量で，圧倒されますけど，見てください。」
1012 , 1023 , 1034 , 1045 , 1067 , 1078 , 1089 , 1100 , 1122 , 1133 , 1144 , 1155 , 1177 , 1188 , 1199 , 1210 , 1232 , 1243 , 1254 , 1265 , 1287 , 1298 , 1320 , 1342 , 1353 , 1364 , 1375 , 1397 , 1408 , 1430 , 1452 , 1463 , 1474 , 1485 , 1507 , 1518 , 1540 , 1562 , 1573 , 1584 , 1595 , 1606 , 1617 , 1628 , 1650 , 1672 , 1683 , 1694 , 1705 , 1716 , 1727 , 1738 , 1760 , 1782 , 1793 , 1815 , 1826 , 1837 , 1848 , 1870 , 1892 , 1903 , 1925 , 1936 , 1947 , 1958 ,

1980 , 2013 , 2024 , 2035 , 2046 , 2068 , 2079 , 2090 , 2101 , 2123 , 2134 , 2145 , 2156 , 2178 , 2189 , 2200 , 2211 , 2233 , 2244 , 2255 , 2266 , 2288 , 2299 , 2310 , 2321 , 2343 , 2354 , 2365 , 2376 , 2398 , 2409 , 2420 , 2431 , 2453 , 2464 , 2475 , 2486 , 2508 , 2519 , 2530 , 2541 , 2563 , 2574 , 2585 , 2596 , 2607 , 2618 , 2629 , 2640 , 2651 , 2673 , 2684 , 2695 , 2706 , 2717 , 2728 , 2739 , 2750 , 2761 , 2783 , 2794 , 2816 , 2827 , 2838 , 2849 , 2860 , 2871 , 2893 , 2904 , 2926 , 2937 , 2948 , 2959 , 2970 , 2981 , 3014 , 3025 , 3036 , 3047 , 3069 , 3091 , 3102 , 3124 , 3135 , 3146 , 3157 , 3179 , 3201 , 3212 , 3234 , 3245 , 3256 , 3267 , 3289 , 3300 , 3311 , 3322 , 3344 , 3355 , 3366 , 3377 , 3399 , 3410 , 3421 , 3432 , 3454 , 3465 , 3476 , 3487 , 3509 , 3520 , 3531 , 3542 , 3564 , 3575 , 3586 , 3597 , 3608 , 3619 , 3630 , 3641 , 3652 , 3674 , 3685 , 3696 , 3707 , 3718 , 3729 , 3740 , 3751 , 3762 , 3784 , 3795 , 3817 , 3828 , 3839 , 3850 , 3861 , 3872 , 3894 , 3905 , 3927 , 3938 , 3949 , 3960 , 3971 , 3982 , 4015 , 4026 , 4037 , 4048 , 4070 , 4092 , 4103 , 4125 , 4136 , 4147 , 4158 , 4180 , 4202 , 4213 , 4235 , 4246 , 4257 , 4268 , 4290 , 4301 , 4312 , 4323 , 4345 , 4356 , 4367 , 4378 , 4400 , 4411 , 4422 , 4433 , 4455 , 4466 , 4477 , 4488 , 4510 , 4521 , 4532 , 4543 , 4565 , 4576 , 4587 , 4598 , 4609 , 4620 , 4631 , 4642 , 4653 , 4675 , 4686 , 4697 , 4708 , 4719 , 4730 , 4741 , 4752 , 4763 , 4785 , 4796 , 4818 , 4829 , 4840 , 4851 , 4862 , 4873 , 4895 , 4906 , 4928 , 4939 , 4950 , 4961 , 4972 , 4983 , 5016 , 5027 , 5038 , 5049 , 5060 , 5071 , 5093 , 5104 , 5126 , 5137 , 5148 , 5159 , 5170 , 5181 , 5203 , 5214 , 5236 , 5247 , 5258 , 5269 , 5280 , 5291 , 5302 , 5313 , 5324 , 5346 , 5357 , 5368 , 5379 , 5390 , 5401 , 5412 , 5423 , 5434 , 5456 , 5467 , 5478 , 5489 , 5511 , 5522 , 5533 , 5544 , 5566 , 5577 , 5588 , 5599 , 5621 , 5632 , 5643 , 5654 , 5676 , 5687 , 5698 , 5709 , 5731 , 5742 , 5753 , 5764 , 5786 , 5797 , 5819 , 5841 , 5852 , 5863 , 5874 , 5896 , 5907 , 5929 , 5951 , 5962 , 5973 , 5984 , 6017 , 6028 , 6039 , 6050 , 6061 , 6072 , 6094 , 6105 , 6127 , 6138 , 6149 , 6160 , 6171 , 6182 , 6204 , 6215 , 6237 , 6248 , 6259 , 6270 , 6281 , 6292 , 6303 , 6314 , 6325 , 6347 , 6358 , 6369 , 6380 , 6391 , 6402 , 6413 , 6424 , 6435 , 6457 , 6468 , 6479 , 6490 , 6512 , 6523 , 6534 , 6545 , 6567 , 6578 , 6589 , 6600 , 6622 , 6633 , 6644 , 6655 , 6677 , 6688 , 6699 , 6710 , 6732 , 6743 , 6754 , 6765 , 6787 , 6798 , 6820 , 6842 , 6853 , 6864 , 6875 , 6897 , 6908 , 6930 , 6952 , 6963 , 6974 , 6985 , 7018 , 7029 , 7040 , 7051 , 7062 , 7073 , 7095 , 7106 , 7128 , 7139 , 7150 , 7161 , 7172 , 7183 , 7205 , 7216 , 7238 , 7249 , 7260 , 7271 , 7282 , 7293 , 7304 , 7315 , 7326 , 7348 , 7359 , 7370 , 7381 , 7392 , 7403 , 7414 , 7425 , 7436 , 7458 , 7469 , 7480 , 7491 , 7513 , 7524 , 7535 , 7546 , 7568 , 7579 , 7590 , 7601 , 7623 , 7634 , 7645 , 7656 , 7678 , 7689 , 7700 , 7711 , 7733 , 7744 , 7755 , 7766 , 7788 , 7799 , 7810 , 7821 , 7843 , 7854 , 7865 , 7876 , 7898 , 7909 , 7920 , 7931 , 7953 , 7964 , 7975 , 7986 , 8019 , 8041 , 8052 , 8063 , 8074 , 8096 , 8107 , 8129 , 8151 , 8162 , 8173 , 8184 , 8206 , 8217 , 8239 , 8261 , 8272 , 8283 , 8294 , 8305 , 8316 , 8327 , 8349 , 8371 , 8382 , 8393 , 8404 , 8415 , 8426 , 8437 , 8459 , 8481 , 8492 , 8514 , 8525 , 8536 , 8547 , 8569 , 8591 , 8602 , 8624 , 8635 , 8646 , 8657 , 8679 , 8701 , 8712 , 8734 , 8745 , 8756 , 8767 , 8789 , 8800 , 8811 , 8822 , 8844 , 8855 , 8866 , 8877 , 8899 , 8910 , 8921 , 8932 , 8954 , 8965 , 8976 , 8987 , 9020 , 9042 , 9053 , 9064 , 9075 , 9097 , 9108 , 9130 , 9152 , 9163 , 9174 , 9185 , 9207 , 9218 , 9240 , 9262 , 9273 , 9284 , 9295 , 9306 , 9317 , 9328 , 9350 , 9372 , 9383 , 9394 , 9405 , 9416 , 9427 , 9438 , 9460 , 9482 , 9493 , 9515 , 9526 , 9537 , 9548 , 9570 , 9592 , 9603 , 9625 , 9636 , 9647 , 9658 , 9680 , 9702 , 9713 , 9735 , 9746 , 9757 , 9768 , 9790 , 9801 , 9812 , 9823 , 9845 , 9856 , 9867 , 9878 , 9900 , 9911 , 9922 , 9933 , 9955 , 9966 , 9977 , 9988 ,

ユウリ「このリストをよく見ると，リスト上のいくつかの数について，4 桁の数 $abcd$ を ab, cd に分けると，$ab + cd = tt$ となる数になっています。とこ

ろが，そうならなかった場合，つまり $ab+cd=stu$ と 3 桁の数になっていた場合，3 桁の数 stu をもう一度 s，tu に分けると，必ず，$s+tu=ww$ となるのです。例えば，9867 は $98+67=165$ となり，$1+65=66$ となります。」

M「4 桁の数 $abcd$ を ab, cd に分けて足すことを，２分割加算とでも名前をつけましょうか。そうすると，ユウリさんが言っていることは，逆順減算で tt というタイプの数にならない 4 桁の数は，つまり数が有限回の逆順減算で 6534 と 2178 のループに入る数は，２分割加算を繰り返すことで tt というタイプになる，ということになりますね。その対偶を考えて，これまでのことを整理してみよう。」

これまでの整理 (1) 2 桁と 3 桁のどんな数 x も有限回の逆順減算で 0 となる。

(2) 4 桁の数 x について，x が２分割加算を繰り返して xx とならなければ，x 有限回の逆順減算で 0 となる。

M「ところで，ユウリさん。4 桁の数 x の逆順減算で 0 になるものの中に，２分割加算を続けて tt となるものがありますか。」

ユウリ「やってみます。えーと。。。コンピュータで計算すると，あっ!!　ありましたあー。あーあ，困りましたねー。」

M「そうですね。では，研究を続けてください。」

4.6　4 桁の逆順減算研究を極める

ユウリ「実は，あの後，コンピュータでいろいろ試してみて，２分割加算ではなくて，２分割減算の方が意味があることがわかりました。つまり，$abcd$ を ab, cd に分けて引いて，$|ab-dc|$ を考えるのです。引く数が cd ではなくて，dc であることに注意してください。」

M「わかりました。続けてください。」

ユウリ「4 桁の数 x にこの操作をすることを，記号を使って $s(x)$ とします。つまり，$x = abcd$ なら $s(x) = |ab - dc|$ です。そうすると。。そうすると。。。」

M「そうすると？」

ユウリ「なんと，4 桁の数 x の逆順減算で 0 になるものの中にある 2 分割加算を続けて tt となるものは，$s(x)$ が 22, 55, 77 のどれかの値だけをとるのです。しかも，6534 と 2178 のループに入る数 x については，$s(x)$ が $11, 22, \cdots 99$ のどれかの値になります。」

M「ふむ。ふむ。」

ユウリ「そこまでわかったのですが，すみせん。ヘルプです。」

M「4 桁の数 x の逆順減算で 0 になる数で，$s(x)$ が 22 となるものはどんなものですか。」

ユウリ「1804, 1914, 2805, 2915, $\cdots$, 9196 です。結構あります。」

M「1804 を 1 回だけ逆順減算すると。。。」

ユウリ「2277 です。また 2 と 7 かあ。」

M「1914 を 1 回だけ逆順減算すると。。。」

ユウリ「2277 です。えっ。あれ，2805 も 1 回の逆順減算で 2277 です。他のも計算してみると。。。すごーい。これらすべて 2277 なる。」

M「逆順減算で 6534 と 2178 のループに入る数 x の $s(x)$ が 22 となるものは 1 回の逆順減算でどうなるんですか。」

ユウリ「しばしお待ちを。ここをこう書き変えてっと。でましたあ。すべて 2178 でした。」

M「少し見えてきましたね。」

ユウリ「$s(x) = 55$ だと，4 桁の数 x の逆順減算で 0 になる場合は，1 回の逆順減算で 5445 になり，6534 と 2178 のループに入る場合は，1 回の逆順減算で 5544 になります。そして，$s(x) = 77$ だと，4 桁の数 x の逆順減算で 0 になる場合は，1 回の逆順減算で 7722 になり，6534 と 2178 のループに入る場合は，1 回の逆順減算で 7623 になりまああす。できた !! 」

4 桁の数 x までの逆順減算の定理

(1) 2 桁と 3 桁のどんな数 x も有限回の逆順減算で 0 となる。

(2) 4 桁の数 $x = abcd$ について，$s(x) = |ab - dc|$ とする。このとき，以下の (A) から (C) が成り立つ。ただし，$1 \leqq t \leqq 9$ とする。

(A) $s(x) \neq tt$ なら，x は有限回の逆順減算で 0 となる。

(B) $s(x) = tt$ で $t \neq 2, 5, 7$ なら，x は有限回の逆順減算で 6534 と 2178 のループに入る。

(C) $s(x) = 22$，55，77 のとき，1 回の逆順減算で，それぞれ 2277，5445，7722 になれば，x は有限回の逆順減算で 0 となる。そして，それら以外は 6534 と 2178 のループに入る。

ユウリ「すごい !!　私感動しました。これで 4 桁の数のどんな数も逆順減算でどうなるかわかります。では，好きな 4 桁数を言ってみてください。」

M「わかりました。それでは，1234 はどうですか。」

ユウリ「1234 ですね。了解しました。えーと，$s(1234) = |12 - 43| = 31$ です。したがって，1234 は有限回の逆順減算で 0 となりまーす。」

M「次は，6831 はどうでしょう。」

ユウリ「$s(6831) = |68 - 13| = 55$ です。おっときましたあ。この場合は，$6831 - 1386 = 5445$，な・の・で，やっぱり，有限回の逆順減算で 0 となりまーす。いえーい !! 」

M「すばらしい。」

ユウリ「ところで，5 桁の数も同じようにできますかねえ。」

M「うーん。どうでしょう。」

4.7 5桁の逆順減算研究は難しいのか

ユウリ「5桁の逆順減算の研究をしてみました。やはり，気になるのは，65934と21978のループに入る場合と，6534と2178のループに入る場合の特徴は何かということです。」

M「そうですよね。」

ユウリ「4桁のときと同じように，5桁の数 $abcde$ に対して，c は逆順減算では0になるので，$s(abcde) = |ab - ed|$ としました。そして，$s(x) = tt$ となるものを調べたところ，やはり，4桁の結果の (B) と (C) に対応する結果がでました。」

5桁の研究のここまでの整理1

$s(x) = tt$ という場合に限り以下のことが成り立つ。

(1) $s(x) = tt$ で $t \neq 2, 5, 7$ なら，x は有限回の逆順減算で65934と21978のループに入る。

(2) $s(x) = 22, 55, 77$ のとき，1回の逆順減算で，それぞれ22077，54045，77022になれば，x は有限回の逆順減算で0となる。そして，それら以外は65934と21978のループに入る。

M「よかったですね。」

ユウリ「でも。。。。6534と2178のループに入る数の判定法が見つからないのです。ぐすっ。。。」

M「困りましたね。」

ユウリ「本当ですよ。でも，頑張って考えてみまあーす。」

4.8 5桁 x の $s(x)$ の周期性

ユウリ「一応。。周期性のような現象を発見しました。」

M「ぜひ，聞きましょう。」

ユウリ「5 桁の $s(x)neqtt$ という場合の研究です。まず，1 桁が 0 に限って考えたのです。つまり $abcd0$ という数です。これを $s(abcd0)$ で変換させて，何かわからないかなあと考えていたんです。1 時間くらい。。。ぼーと。ときどき，眠りながら。。。そしたら，気づいたんです。6534 と 2178 のループに入る数が $s(abcd0)$ の 1 桁目で決まっているみたいなんです。」
M「つまり，$s(abcd0)$ mod10 の値が大切だということですね。」
ユウリ「はい。でも。。。」
M「でも？」
ユウリ「統一感が無いんです。」
M「ユウリさんの言いたいことがよくわからないので，もう少し具体的に教えてもらえませんか。」
ユウリ「わかりました。5 桁 x の数を 1000 ごとに区切り 10 ステップでみると，$s(x)$ に周期性があるのです。表を作ったので見てください。」

（$x \equiv 0$ mod10 の場合 10000 ∼ 19990）

x の範囲	0 に変換される $s(x)$ mod10 の周期列	6534 と 2178 のループに入る $s(x)$ mod10 の周期列
10000 ∼ 10990	0, 9, 4	8, 7, 6, 5, 3, 2
11000 ∼ 11990	0, 9, 4	8, 7, 6, 5, 3, 2
12000 ∼ 12990	2, 0, 9, 4	8, 7, 6, 5, 3
13000 ∼ 13990	2, 0, 9, 4	3, 8, 7, 6, 5
14000 ∼ 14990	4, 2, 0, 9	3, 8, 7, 6, 5
15000 ∼ 15990	5, 4, 2, 0, 9	3, 8, 7, 6
16000 ∼ 16990	5, 4, 2, 0, 9	6, 3, 8, 7
17000 ∼ 17990	5, 4, 2, 0, 9	7, 6, 3, 8
18000 ∼ 18990	5, 4, 2, 0, 9	8, 7, 6, 3
19000 ∼ 19990	9, 5, 4, 2, 0, 9	8, 7, 6, 3

（$x \equiv 0$ mod10 の場合 20000 ∼ 29990）

x の範囲	0 に変換される $s(x)$ mod10 の周期列	6534 と 2178 のループに入る $s(x)$ mod10 の周期列
20000 ∼ 20990	0, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2	9
21000 ∼ 21990	0, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2	1, 9
22000 ∼ 22990	0, 8, 7, 6, 5, 4, 3	1, 9
23000 ∼ 23990	3, 0, 8, 7, 6, 5, 4	1, 9
24000 ∼ 24990	4, 3, 0, 8, 7, 6, 5	1, 9
25000 ∼ 25990	5, 4, 3, 0, 8, 7, 6	1, 9
26000 ∼ 26990	5, 4, 3, 0, 8, 7	6, 1, 9
27000 ∼ 27990	5, 4, 3, 0, 8	7, 6, 1, 9
28000 ∼ 28990	8, 5, 4, 3, 0	7, 6, 1, 9
29000 ∼ 29990	8, 5, 4, 3, 0	9, 7, 6, 1

（$x \equiv 0$ mod10 の場合 30000 ∼ 39990）

x の範囲	0 に変換される $s(x)$ mod10 の周期列	6534 と 2178 のループに入る $s(x)$ mod10 の周期列
30000 ∼ 30990	0, 7	9, 8, 6, 5, 4, 3, 1
31000 ∼ 31990	1, 0, 7	9, 8, 6, 5, 4, 3
32000 ∼ 32990	2, 1, 0, 7	9, 8, 6, 5, 4, 3
33000 ∼ 33990	2, 1, 0, 7	9, 8, 6, 5, 4
34000 ∼ 34990	2, 1, 0, 7	4, 9, 8, 6, 5
35000 ∼ 35990	5, 2, 1, 0, 7	4, 9, 8, 6
36000 ∼ 36990	5, 2, 1, 0, 7	6, 4, 9, 8
37000 ∼ 37990	7, 5, 2, 1, 0	6, 4, 9, 8
38000 ∼ 38990	8, 7, 5, 2, 1, 0	6, 4, 9
39000 ∼ 39990	9, 8, 7, 5, 2, 1, 0	6, 4

（$x \equiv 0$ mod10 の場合 40000 ∼ 49990）

x の範囲	0 に変換される $s(x)$ mod10 の周期列	6534 と 2178 のループに入る $s(x)$ mod10 の周期列
40000 ∼ 40990	0, 6, 4, 2, 1	9, 8, 7, 5
41000 ∼ 41990	1, 0, 6, 4, 2	9, 8, 7, 5
42000 ∼ 42990	1, 0, 6, 4	2, 9, 8, 7, 5
43000 ∼ 43990	3, 1, 0, 6, 4	2, 9, 8, 7, 5
44000 ∼ 44990	3, 1, 0, 6	2, 9, 8, 7, 5
45000 ∼ 45990	5, 3, 1, 0, 6	2, 9, 8, 7
46000 ∼ 46990	6, 5, 3, 1, 0	2, 9, 8, 7
47000 ∼ 47990	7, 6, 5, 3, 1, 0	2, 9, 8
48000 ∼ 48990	8, 7, 6, 5, 3, 1, 0	2, 9
49000 ∼ 49990	9, 8, 7, 6, 5, 3, 1, 0	2

（$x \equiv 0$ mod10 の場合 50000 ∼ 59990）

x の範囲	0 に変換される $s(x)$ mod10 の周期列	6534 と 2178 のループに入る $s(x)$ mod10 の周期列
50000 ∼ 50990	9, 8, 7, 6, 3, 1	0, 5, 2
51000 ∼ 51990	1, 9, 8, 7, 6, 3	0, 5, 2
52000 ∼ 52990	1, 9, 8, 7, 6, 3	2, 0, 5
53000 ∼ 53990	3, 1, 9, 8, 7, 6	2, 0, 5
54000 ∼ 54990	4, 1, 9, 8, 7, 6	2, 0, 5
55000 ∼ 55990	4, 1, 9, 8, 7, 6	2, 0
56000 ∼ 56990	6, 4, 1, 9, 8, 7	2, 0
57000 ∼ 57990	7, 6, 4, 1, 9, 8	2, 0
58000 ∼ 58990	7, 6, 4, 1, 9	8, 2, 0
59000 ∼ 59990	9, 7, 6, 4, 1	8, 2, 0

（$x \equiv 0$ mod10 の場合 60000 ～ 69990）

x の範囲	0 に変換される $s(x)$ mod10 の周期列	6534 と 2178 のループに入る $s(x)$ mod10 の周期列
60000 ～ 60990	0, 9, 7, 4	8, 6, 3, 2, 1
61000 ～ 61990	1, 0, 9, 7, 4	8, 6, 3, 2
62000 ～ 62990	2, 1, 0, 9, 7, 4	8, 6, 3
63000 ～ 63990	3, 2, 1, 0, 9, 7, 4	8, 6
64000 ～ 64990	4, 3, 2, 1, 0, 9, 7	8, 6
65000 ～ 65990	5, 4, 3, 2, 1, 0, 9, 7	8, 6
66000 ～ 66990	5, 4, 3, 2, 1, 0, 9, 7	8
67000 ～ 67990	7, 5, 4, 3, 2, 1, 0, 9	8
68000 ～ 68990	7, 5, 4, 3, 2, 1, 0, 9	8
69000 ～ 69990	9, 7, 5, 4, 3, 2, 1, 0	8

（$x \equiv 0$ mod10 の場合 70000 ～ 79990）

x の範囲	0 に変換される $s(x)$ mod10 の周期列	6534 と 2178 のループに入る $s(x)$ mod10 の周期列
70000 ～ 70990	0, 9, 7, 5, 3	4, 2, 1
71000 ～ 71990	1, 0, 9, 7, 5, 3	4, 2
72000 ～ 72990	2, 1, 0, 9, 7, 5, 3	4
73000 ～ 73990	3, 2, 1, 0, 9, 7, 5	4
74000 ～ 74990	3, 2, 1, 0, 9, 7, 5	4
75000 ～ 75990	5, 3, 2, 1, 0, 9, 7	4
76000 ～ 76990	5, 3, 2, 1, 0, 9, 7	6, 4
77000 ～ 77990	5, 3, 2, 1, 0, 9, 8	6, 4
78000 ～ 78990	8, 5, 3, 2, 1, 0, 9	6, 4
79000 ～ 79990	9, 8, 5, 3, 2, 1, 0	6, 4

($x \equiv 0$ mod10 の場合 80000 ∼ 89990)

x の範囲	0 に変換される $s(x)$ mod10 の周期列	6534 と 2178 のループに入る $s(x)$ mod10 の周期列
80000 ∼ 80990	0, 2	9, 8, 6, 5, 4, 3, 1
81000 ∼ 81990	0, 2	1, 9, 8, 6, 5, 4, 3
82000 ∼ 82990	2, 0	1, 9, 8, 6, 5, 4, 3
83000 ∼ 83990	2, 0	3, 1, 9, 8, 6, 5, 4
84000 ∼ 84990	2, 0	4, 3, 1, 9, 8, 6, 5
85000 ∼ 85990	5, 2, 0	4, 3, 1, 9, 8
86000 ∼ 86990	6, 5, 2, 0	4, 3, 1, 9, 8
87000 ∼ 87990	7, 6, 5, 2, 0	4, 3, 1, 9, 8
88000 ∼ 88990	7, 6, 5, 2, 0	4, 3, 1, 9
89000 ∼ 89990	7, 6, 5, 2, 0	9, 4, 3, 1

($x \equiv 0$ mod10 の場合 90000 ∼ 99990)

x の範囲	0 に変換される $s(x)$ mod10 の周期列	6534 と 2178 のループに入る $s(x)$ mod10 の周期列
90000 ∼ 90990	0, 9, 7, 6, 5, 4, 3, 1	
91000 ∼ 91990	1, 0, 9, 7, 6, 5, 4, 3	
92000 ∼ 92990	1, 0, 9, 7, 6, 5, 4, 3	2
93000 ∼ 93990	1, 0, 9, 7, 6, 5, 4	3, 2
94000 ∼ 94990	1, 0, 9, 7, 6, 5	4, 3, 2
95000 ∼ 95990	5, 1, 0, 9, 7, 6	4, 3, 2
96000 ∼ 96990	6, 5, 1, 0, 9, 7	4, 3, 2
97000 ∼ 97990	6, 5, 1, 0, 9	7, 4, 3, 2
98000 ∼ 98990	8, 6, 5, 1, 0, 9	7, 4, 3, 2
99000 ∼ 99990	8, 6, 5, 1, 0	7, 4, 3, 2

M「とても頑張ったんですね。」

ユウリ「はい。実は，u を 0 から 9 として $x \equiv u$ mod10 で考えても，上と同じ範囲で $s(x)$ に周期性があることもわかりました。でも，何故，$s(x)$ に周期性があるのかさっぱりわからないんです。あーーー。」

M「とりあえず，$s(x)$ の周期性を見つけたことは，すばらしいことだと思います。」