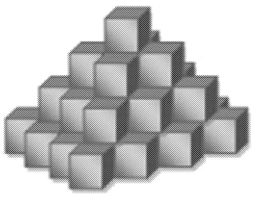
Chapter 2

ピラミッドのキューブ積みからはじまる研究

2.1　キューブを安定して積む方法

数学クラブに入部したいといってきた学生が，ピラミッドのキューブの積み方に関する考察を説明してくれた．



ユウキ「中学の時，ピンポン玉で遊んでいて，それをヒントにキューブを安定して積むことを考えました．つまり安定したピラミッドの積み方です．数学クラブで研究したいので聞いてください.」

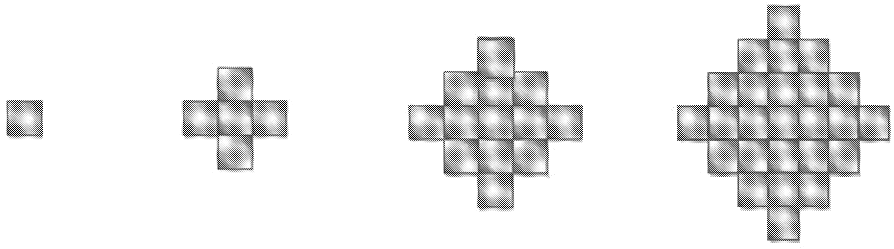
M「いいですよ．面白そうですね．説明してください.」

ユウキ「キューブを上の段から

$$1,\ 5,\ 13,\ 25,\ 41,\ 61,\ 81,\ \cdots$$

個と積んでいくと，安定していて，しかも美しい積み方となります．理想的なピラミッドはこのように積まれているのだと思います.」

M「断面図を見ると面白いね.」



ユウキ「そうです．上から1段目は1だけ，2段目からが面白くて，平面的に2段目は1, 3, 1と並んでいて，3段目は1, 3, 5, 3, 1で，4段目は1, 3, 5, 7, 5, 3, 1と対称的です．それと，n段目にあるキューブの数の公式は$2n^2-2n-1$で，これは正しいと思っています.」

M「すばらしいですね. ところで, 断面図で中心の増え方は1, 3, 5, 7, 9 $\cdots$と増えているね. つまり平面で正方形を積むと考えたときの安定な積み方じゃないの．表にして考えてみれば.」

ユウキ「そうですね.

段	平面	空間
1	1	1
2	3	5
3	5	13
4	7	25
5	9	41
6	11	61
7	13	85
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$2n-1$	$2n^2-2n-1$

M「なるほど．空間の次は4次元空間で，その中の4次元立方体の積み方が気になるなあ．その次は5次元空間で5次元立方体の積み方はどうなって

いるかだ．4次元とか5次元とか言ってもわからないだろうし，幾何学的研究は大変なので，表の数値的な法則を自分なりに発見して，その隣の列がどうなるか予想してみてはどうですか．n段目の一般式がどうなるのかも妙に気になります.」

ユウキ「わかりました.」

2.2 ピラミッドキューブ数の表を拡張する

ユウキ「先週の表を拡張できました.」

M「すばらしい.」

ユウキ「これがその表です．4次元とか5次元とかは，よくわからないんですけど，とりあえず整理するためにその言葉は使いました.」

段	1次元	2次元	3次元	4次元	5次元	6次元
1	1	1	1	1	1	1
2	1	3	5	7	9	11
3	1	5	13	25	41	61
4	1	7	25	63	129	231
5	1	9	41	129	321	450
6	1	11	61	231	681	1452
7	1	13	85	377	1289	3422
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	1	$2n-1$	$2n^2-2n+1$	?	?	?

ユウキ「求めたい位置の数は，（すぐ左隣の数＋すぐ上の数＋すぐ斜め左上の数）という法則で作りました．そうすると，1次元の列を作った方が都合がよくなり，それも入れました．表を作りながら気づいたんですけど，右斜め上方向に数字を追っていくと，まず1，次に$1,1$，次が$1,3,1$，そして$1,5,5,1$ さらに$1,7,13,7,1$ というように対称的に数字が並んでいます．それはよかったんですけど，n段目の一般式は求めることはできませんでした．僕はn段目の一般式をどうしても求めたいんですけど.」

M「すばらしい発見と拡張ですね．n 段目の一般式の出し方は多分階差数列を考えればできると思いますが，面倒だから，観点を変えた方がよさそうですね．数字を斜めに追った点は良い見方だと思います．パスカル三角形を知ってますか？」

ユウキ「はい．一応知ってます.」

M「パスカル三角形と比較してみてはどうでしょう.」

ユウキ「わかりました.」

2.3 パスカル三角形

パスカル三角形を説明しよう．パスカル三角形とは $(x+1)^2$ を展開したときの x の係数を順に並べたものである．つまり，$(x+1)^0 = 1$ なので 1．$(x+1)^1 = x+1$ なので 1，1．$(x+1)^2 = x^2+2x+1$ なので 1，2，1．$(x+1)^3 = x^3+3x^2+3x+1$ なので 1，3，3，1．$(x+1)^4 = x^4+4x^3+6x^2+4x+1$ なので 1，4，6，4，4，1．とし，表にしたものがパスカル三角形である．

n	x^0	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

すぐ分かるように，パスカル三角形は求めたい位置の数がすぐ上の数とすぐ斜め左の数の和としてあらわれる．したがって，n 行の数が全て分かれば次の $n+1$ 行の数も全て計算できるのである．しかし，この方法では,「n 行目の m 列目の数は何か？」という問いに対する答えは得られない．これを解決するためには，コンビネーションという計算法が必要となる．

2.4 コンビネーション

1から5の数が書かれたカードが1枚ずつある．このカードから3桁の数を何通り作ることができるかという問題を考えよう．

まず，3桁に入る数は1から5のカードから選ぶため5通りある．2桁に入る数は，3桁目で1枚使ったので残りの4枚から選ぶことになる．そして1桁に入る数は，残りの3枚のカードから選ぶので3通りである．したがって，3桁の数は全部で$5 \times 4 \times 3$通りある．$5 \times 4 \times 3$を ${}_5\mathrm{P}_3$ と書き，5パーミュテーション3と呼ぶ．パーミュテーション(permutation)は日本語で「順列」と訳される．

もう一問だけ練習しておこう．a, b, c, d, e, f, gという7つのアルファベットが書かれてある7枚のカードを4枚ぬきだして左から並べるとき，並べ方は全部で何通りあるだろうか．7枚から4枚ぬいて並べるのであるから，答えは ${}_7\mathrm{P}_4$，つまり，$7 \times 6 \times 5 \times 4$である．

さて，コンビネーションを理解するために次の問題を考えよう．

問題 1から5の数が書かれたカードが1枚ずつある．このカードから3枚を選ぶとき，選び方（組み合わせ）は何通りあるか．

5枚から3枚を選んで並べる方法は， ${}_5\mathrm{P}_3$ 通りであることはよいだろう．しかし，選ばれた3枚を並べる必要はないので， ${}_5\mathrm{P}_3$ を選ばれた3枚の並べ方の数で割ればよい．これは1から5までを1回ずつ使った3桁の数を，使用される3の数のグループに分けることであり，割り算の本来の意味である．つまり，選ばれた3つの数字がa,b,cの並べ方は ${}_3\mathrm{P}_3 = 3 \times 2 \times 1$であり，カード5枚の中から3枚を選ぶ選び方は， ${}_5\mathrm{P}_3/\ {}_3\mathrm{P}_3$ となる． ${}_5\mathrm{P}_3/\ {}_3\mathrm{P}_3$ を ${}_5\mathrm{C}_3$ と書き，5コンビネーション3と呼ぶ．コンビネーション(combinetion)は日本語で「組み合わせ」と訳される．

1問だけ練習しておこう．a, b, c, d, e, f, gという7つのアルファベットが書かれてある5枚のカードを5枚選ぶ方法は全部で何通りあるだろうか．7

枚から単に5枚選ぶだけであるから，答えは ${}_7\mathrm{C}_5$，つまり，

$$ {}_7\mathrm{C}_5 = \frac{{}_7\mathrm{P}_5}{{}_5\mathrm{P}_5} = \frac{7\times6\times5\times4\times3}{5\times4\times3\times2\times1} = \frac{7\times6}{2\times1} $$

通りである．最後にわざと計算しなかった理由は，それが ${}_7\mathrm{C}_2$ に等しいことを気づいてもらうためである．つまり，${}_7\mathrm{C}_5 = {}_7\mathrm{C}_2$ が成り立つのである．この法則は一般に

$$ {}_n\mathrm{C}_k = {}_n\mathrm{C}_{n-k} $$

と表され，対称性と呼ばれる．

コンビネーションが理解できたので，パスカル三角形の中の数をコンビネーションで考えることができる．たとえば，$(x+1)^5$ を

$$ (x+1)^5 = (x+1)(x+1)(x+1)(x+1)(x+1) $$

と $(x+1)$ の5つの積と考える．そうすると，たとえば，x^3 の係数は，5つ $(x+1)$ の中から x を選ぶ括弧を3つ選ぶ数となる．つまりそれは ${}_5\mathrm{C}_3$ であり，

$$ {}_5\mathrm{C}_3 = \frac{5\times4\times3}{3\times2\times1} = 10 $$

である．コンビネーションの対称性から x^2 の係数も ${}_5\mathrm{C}_2 = {}_5\mathrm{C}_3 = 10$ となる．

注意！ ${}_n\mathrm{P}_0 = 1$，${}_n\mathrm{C}_0 = 1$ と定義される．

2.5 ピラミッドキューブ数とパスカル三角形の関係

ユウキ「ピラミッドキューブ数とパスカル三角形の関係を発見しました．分かりやすくするために，ピラミッドキューブ数の位置をパスカル三角形と同じ位置に変えました．また，比較しやすいように，次元という言葉もやめて単に列としました.」

【ピラミッドキューブ数】

段	0 列	1 列	2 列	3 列	4 列	5 列
0	1					
1	1	1				
2	1	3	1			
3	1	5	5	1		
4	1	7	13	7	1	
5	1	9	25	25	9	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

【パスカル三角形】

n	x^0	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5
0	${}_0\mathrm{C}_0 = 1$					
1	${}_1\mathrm{C}_0 = 1$	${}_1\mathrm{C}_1 = 1$				
2	${}_2\mathrm{C}_0 = 1$	${}_2\mathrm{C}_1 = 2$	${}_2\mathrm{C}_2 = 1$			
3	${}_3\mathrm{C}_0 = 1$	${}_3\mathrm{C}_1 = 3$	${}_3\mathrm{C}_2 = 3$	${}_3\mathrm{C}_3 = 1$		
4	${}_4\mathrm{C}_0 = 1$	${}_4\mathrm{C}_1 = 4$	${}_4\mathrm{C}_2 = 6$	${}_4\mathrm{C}_3 = 4$	${}_4\mathrm{C}_4 = 1$	
5	${}_5\mathrm{C}_0 = 1$	${}_5\mathrm{C}_1 = 5$	${}_5\mathrm{C}_2 = 10$	${}_5\mathrm{C}_3 = 10$	${}_5\mathrm{C}_4 = 5$	${}_5\mathrm{C}_5 = 1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

ユウキ「説明しやすいように記号を使います．(i, j) と書いたらピラミッドキューブ数の表の i 段目 j 列目を表します．たとえば，$(0, 0) = 1$，$(1, 1) = 1$，$(2, 1) = 2$，$(3, 2) = 5$ ということです．

この記号を使うと，まず，0 列目を見ます．明らかに n 段目 $(n, 0) =_n \mathrm{C}_0 = 1$ となります．次に，1 列目ですが，パスカル三角形では自然数が並び，ピラミッドキューブ数の表では奇数が並んでいます．奇数は連続する 2 数を足すことで得られるので，

$$
\begin{aligned}
(1, 1) &= {}_0\mathrm{C}_1 +_1 \mathrm{C}_1 = 0 + 1 = 1, \\
(2, 1) &= {}_1\mathrm{C}_1 +_2 \mathrm{C}_1 = 1 + 2 = 3, \\
(3, 1) &= {}_2\mathrm{C}_1 +_3 \mathrm{C}_1 = 2 + 3 = 5, \\
(4, 1) &= {}_3\mathrm{C}_1 +_4 \mathrm{C}_1 = 3 + 4 = 7, \\
&\cdots
\end{aligned}
$$

つまり，n 段目の 1 列目は $(n,1) = {}_{n-1}\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_1$ となります.」

M「なるほど．すばらしい.」

ユウキ「2 列目は結構考えました．ピラミッドキューブ数の 2 列目は,

$$1,\ 5,\ 13,\ 25,\ 41,\ 61,\ \cdots$$

です．1 列目ではパスカル三角形に現れる連続する 2 数を足したことを考えて，2 列目ではパスカル三角形に現れる連続する 3 数を足すのではないかと思いました．そして,

$$\begin{aligned}
(3,2) &= {}_1\mathrm{C}_2 + 2 \times {}_2\mathrm{C}_2 + {}_3\mathrm{C}_2 = 0 + 2 \times 1 + 3 = 5,\\
(4,2) &= {}_2\mathrm{C}_2 + 2 \times {}_3\mathrm{C}_2 + {}_4\mathrm{C}_2 = 1 + 2 \times 3 + 6 = 13,\\
(5,2) &= {}_3\mathrm{C}_2 + 2 \times {}_4\mathrm{C}_2 + {}_5\mathrm{C}_2 = 3 + 2 \times 6 + 10 = 25,\\
(6,2) &= {}_4\mathrm{C}_2 + 2 \times {}_5\mathrm{C}_2 + {}_6\mathrm{C}_2 = 6 + 2 \times 10 + 15 = 41,\\
&\cdots
\end{aligned}$$

つまり，n 段目の 2 列目は $(n,2) = {}_{n-2}\mathrm{C}_2 + 2 \times {}_{n-1}\mathrm{C}_2 + {}_n\mathrm{C}_2$ となります.」

M「おおー．すばらしい.」

ユウキ「3 列目はさらに考えました．ピラミッドキューブ数の 3 列目は,

$$1,\ 7,\ 25,\ 63,\ 129,\ 231,\ \cdots$$

です．2 列目まで計算法を考えると，3 列目でも同じように，パスカル三角形に現れる連続する 4 数を足すのではないかと思いました．そして，分かったことが次の法則です.

$$\begin{aligned}
(4,3) &= {}_1\mathrm{C}_3 + 3 \times {}_2\mathrm{C}_3 + 3 \times {}_3\mathrm{C}_3 + {}_4\mathrm{C}_3 = 0 + 3 \times 0 + 3 \times 1 + 4 = 7,\\
(5,3) &= {}_2\mathrm{C}_3 + 3 \times {}_3\mathrm{C}_3 + 3 \times {}_4\mathrm{C}_3 + {}_5\mathrm{C}_3 = 0 + 3 \times 1 + 3 \times 4 + 10 = 25,\\
(6,3) &= {}_3\mathrm{C}_3 + 3 \times {}_4\mathrm{C}_3 + 3 \times {}_5\mathrm{C}_3 + {}_6\mathrm{C}_3 = 1 + 3 \times 4 + 3 \times 10 + 20 = 63,\\
(7,3) &= {}_4\mathrm{C}_3 + 3 \times {}_5\mathrm{C}_3 + 3 \times {}_6\mathrm{C}_3 + {}_7\mathrm{C}_3 = 4 + 3 \times 10 + 3 \times 20 + 35 = 129,\\
&\cdots
\end{aligned}$$

となり，n 段目の 3 列目は $(n,3) = {}_{n-3}\mathrm{C}_3 + 3 \times {}_{n-2}\mathrm{C}_3 + 3 \times {}_{n-1}\mathrm{C}_3 + {}_n\mathrm{C}_3$ です.」

M「そうなのか.」

ユウキ「ここまでくると，4 列目の法則はすぐに予想できます．つまり，n 段目の 4 列目は $(n,4) = {}_{n-4}\mathrm{C}_4 + 4 \times {}_{n-3}\mathrm{C}_4 + 6 \times {}_{n-2}\mathrm{C}_4 + 4 \times {}_{n-1}\mathrm{C}_4 + {}_n\mathrm{C}_4$ となります.」

2.6 ピラミッドキューブ数の定理

M「大発見だね !!，以上の予想を，いや多分正しいので，定理としてまとめてみたらどうでしょう.」

ユウキ「もう一度整理します.

$$
\begin{aligned}
(n,1) &= {}_{n-1}\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_1 \\
(n,2) &= {}_{n-2}\mathrm{C}_2 + 2 \cdot {}_{n-1}\mathrm{C}_2 + {}_n\mathrm{C}_2 \\
(n,3) &= {}_{n-3}\mathrm{C}_3 + 3 \cdot {}_{n-2}\mathrm{C}_3 + 3 \cdot {}_{n-1}\mathrm{C}_3 + {}_n\mathrm{C}_3 \\
(n,4) &= {}_{n-4}\mathrm{C}_4 + 4 \cdot {}_{n-3}\mathrm{C}_4 + 6 \cdot {}_{n-2}\mathrm{C}_4 + 4 \cdot {}_{n-1}\mathrm{C}_4 + {}_n\mathrm{C}_4
\end{aligned}
$$

です．各 (n,j) のコンビネーションの前の係数だけに着目すると，

$$
\begin{aligned}
(n,1) &\to 1,\ 1 \\
(n,2) &\to 1,\ 2,\ 1 \\
(n,3) &\to 1,\ 3,\ 3,\ 1 \\
(n,4) &\to 1,\ 4,\ 6,\ 4,\ 1
\end{aligned}
$$

となっている．つまり，パスカル三角形が見えてくるのです.」

M「ふむふむ... でっ？」

ユウキ「定理を書きます．うーんっと....」

ピラミッドキューブ数の定理 (i,j) をピラミッドキューブ数の表の i 段目 j 列目の数とする．このとき，$n \geqq j$ である (n,j) に対して，

$$(n,j) = \sum_{k=0}^{j} {}_j\mathrm{C}_k \cdot {}_{n-j+k}\mathrm{C}_j$$

が成り立つ.

ユウキ「$j=2$ の場合，$n \geqq 2$ であり，

$$(n,2) = {}_{n-2}\mathrm{C}_2 + 2 \times {}_{n-1}\mathrm{C}_2 + {}_n\mathrm{C}_2 = 2n^2 - 6n + 5$$

となる．n を $n-2$ で置き換えると

$$2(n-2)^2 - 6(n-2) + 5 = 2n^2 - 2 + 1$$

なので，最初自分が見つけたピラミッドキューブ数の一般式と同じだ.」

M「$j=3$ だとどうなる？」

ユウキ「$j=3$ だと，$n \geqq 3$ であり，

$$(n,3) = {}_{n-3}\mathrm{C}_3 + 3 \times {}_{n-2}\mathrm{C}_3 + 3 \times {}_{n-1}\mathrm{C}_3 + {}_n\mathrm{C}_3$$

計算が結構大変なので，コンピュータでやります．結果は，っと，

$$\frac{4n^3}{3} - 10n^2 + \frac{80n}{3} - 25$$

です．n を $n-3$ で置き換えると，

$$\frac{4n^3}{3} - 22n^2 + \frac{368n}{3} - 231$$

で，一般式で書くとあまり美しくないですね.」

M「確かに.」

ユウキ「ところで，証明ってどうすればよいのでしょうか.」

M「数学的帰納法でやればできるはず．もし難しいようなら手伝います.」

その後，ユウキは，数学的帰納法を二重に使うことでピラミッドキューブ数の定理の証明を完了した.

M「君が発見したピラミッドキューブ数というのは，パスカル三角形の一般化に向かっているなあ．次はその方向で考えてみてばどうでしょう.」

2.7 ピタゴラス三角形の一般化

ユウキ「あの後，いろいろと考えて，まず，次の数の三角形を考えてみました.」

段	0 列	1 列	2 列	3 列	4 列	5 列
0	1					
1	1	1				
2	1	4	1			
3	1	7	7	1		
4	1	10	22	10	1	
5	1	13	46	46	13	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

M「これには，どういう法則ありますか.」

ユウキ「たとえば，2 段 1 列の 4 は，0 段 0 列の 1 を 2 倍したものに，1 段 0 列の 1 と 1 段 1 列の 1 を足したものとなっています．つまり，$2\times1+1+1=4$ です．その他でいえば 4 段 2 列の 22 は，2 段 1 列の 4 を 2 倍したものに，3 段 1 列の 7 と 3 段 3 列の 7 を足したもの，つまり，$2\times4+7+7=22$ です．一般に，前回と同じように，(n,j) を n 段 j 列の位置に入る数とすると，この数の三角形は，

$$(n,j)=2(n-2,j-1)+(n-1,j-1)+(n-1,j)$$

という規則で作られたものなのです.

M「ほおー.」

ユウキ「ポイントは，(n, j) に対して，$(n-2, j-1)$ の数を 2 倍した点にあります．ピラミッドキューブ数のときは，1 倍しました．ということは，ピタゴラス三角形は $(n-2, j-1)$ の数を 0 倍したものと言えるのです.」

M「ふむ．ふむ.」

ユウキ「ですから，(n, j) の数を決めるとき，$(n-2, j-1)$ の数を t 倍して

$$(n, j) = t(n-2, j-1) + (n-1, j-1) + (n-1, j)$$

という規則で作られた数の三角形は，ピタゴラス三角形の一般化といってもよいと思います.」

M「すばらしい．それを表で表してみよう.」

ユウキ「はい．わかりました.」

段	0 列	1 列	2 列	3 列	4 列	5 列
0	1					
1	1	1				
2	1	$t+2$	1			
3	1	$2t+3$	$2t+3$	1		
4	1	$3t+4$	t^2+6t+6	$3t+4$	1	
5	1	$4t+5$	$3t^2+12t+10$	$3t^2+12t+10$	$4t+5$	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

M「ウェイト t のピタゴラス三角形とでも名付けましょうか．記号を使っては $P[t]$ 三角形でもいいですね．$P[0]$ 三角形が普通のピタゴラス三角形，$P[0]$ 三角形がピラミッドキューブ数を表す三角形ですね．$P[-1]$ 三角形なんていうのは，どうなりますか？」

ユウキ「えっ？　あっ！　あーそんなんだ．気づきませんでした．すべて 1 です.」

【$P[-1]$ 三角形】

段	0 列	1 列	2 列	3 列	4 列	5 列
0	1					
1	1	1				
2	1	1	1			
3	1	1	1	1		
4	1	1	1	1	1	
5	1	1	1	1	1	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

M「$P[-2]$ 三角形は，どうなりますか？」

ユウキ「えーと..... 特に目立った特徴はないようです.」

【$P[-2]$ 三角形】

段	0 列	1 列	2 列	3 列	4 列	5 列
0	1					
1	1	1				
2	1	0	1			
3	1	-1	-1	1		
4	1	-2	-2	-2	1	
5	1	-3	-2	-2	-3	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

2.8 $P[t]$ 三角形の定理

ユウキ「$P[t]$ 三角形をコンビネーションで考えてみました.」

M「いいことですね.」

ユウキ「まず，0 列目はすべて 1 なので $(n,0) =_n \mathrm{C}_0$ で簡単です．1 列目は，1 段目から下に $1,\ t+2,\ 2t+3,\ 3t+4,\ \cdots,(n-1)t+n$ となっているので，

$$(n,1) = t \cdot_{n-1} \mathrm{C}_1 +_n \mathrm{C}_1$$

となります．ただし，$a<b$ のとき ${}_a\mathrm{C}_b = 0$ とします．これは，$t=1$ のときがピラミッドキューブの定理です.」

M「なるほど」

ユウキ「同様にして，2 列目の式は，

$$(n,2) = t^2 \cdot {}_{n-2}\mathrm{C}_2 + 2t \cdot {}_{n-1}\mathrm{C}_2 + {}_n\mathrm{C}_1,$$

3 列目の式は，

$$(n,3) = t^3 \cdot {}_{n-3}\mathrm{C}_3 + 3t^2 \cdot {}_{n-2}\mathrm{C}_3 + 3t \cdot {}_{n-1}\mathrm{C}_3 + {}_n\mathrm{C}_3,$$

そして，4 列目の式は，

$$(n,4) = t^4 \cdot {}_{n-4}\mathrm{C}_4 + 4t^3 \cdot {}_{n-3}\mathrm{C}_4 + 6t^2 \cdot {}_{n-2}\mathrm{C}_4 + 4t \cdot {}_{n-1}\mathrm{C}_4 + {}_n\mathrm{C}_4$$

となっていました．一般式で書くこともでき，それを定理にしました．これもやはり，数学的帰納法を二重に使って証明できます.」

$P[t]$ 三角形の定理 (i,j) を $P[t]$ 三角形の表の i 段目 j 列目の数とする．このとき，$n \geqq j$ である (n,j) に対して，

$$(n,j) = \sum_{k=0}^{j} t^{j-k} \cdot {}_j\mathrm{C}_k \cdot {}_{n-j+k}\mathrm{C}_j$$

が成り立つ.

2.9 $P[t]$ 三角形の斜め方向の和

M「パスカル三角形はフィボナッチ数列との関係があることは有名です．つまり，パスカル三角形の右斜め上方向への和からフィボナッチ数列が得られるのです.」

$$\begin{array}{llllll}
\multicolumn{6}{l}{\underline{\;1\;\;1\;\;2\;\;3\;\;5\;\;\cdots\qquad \text{フィボナッチ数列}}} \\
1 \\
1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 3 & 3 & 1 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1
\end{array}
\qquad \text{パスカル三角形}$$

ユウキ「$P[1]$ 三角形の右斜め上方向への和は，隣り合う 3 つの数字を足していく数列になっていました.」

M「それは以前，数学クラブの先輩たちが研究した 3 フィボナッチ数列というものです．トリボナッチ数列と呼ばれたりもしています.「11 からはじまる数学」という本に詳しく載っていますが，その本では，3 パスカル三角形から 3 フィボナッチ数列が得られることを扱っています.」

$$\begin{array}{llllll}
\multicolumn{6}{l}{\underline{\;1\;\;1\;\;2\;\;4\;\;7\;\;13\;\;\cdots\qquad 3\,\text{フィボナッチ数列}}} \\
1 \\
1 & 1 \\
1 & 3 & 1 \\
1 & 5 & 5 & 1 \\
1 & 7 & 13 & 7 & 1 \\
1 & 9 & 25 & 25 & 9 & 1
\end{array}
\qquad P[1]\,\text{三角形}$$

ユウキ「一般的な $P[t]$ 三角形の右斜め上方向への和を計算すると... うまく言えないので数式で書きます．その数列を $\{a_n\}$ とすると，$a_1 = 1$，$a_2 = 1$，$a_3 = 2$ で $n \geqq 4$ のとき，

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + ta_{n-3}$$

となっていると思われるのです．たぶん間違いないと思います.」

$$\begin{array}{llllll}
\multicolumn{6}{l}{\underline{\;1\;\;1\;\;2\;\;t+3\;\;2t+5\;\;5t+8\;\;t^2+10t+13\;\;\cdots}} \\
1 \\
1 & 1 \\
1 & t+2 & 1 & & & \qquad P[t]\,\text{三角形} \\
1 & 2t+3 & 2t+3 & 1 \\
1 & 3t+4 & t^2+6t+6 & 3t+4 & 1 \\
1 & 4t+5 & 3t^3+12t+10 & 3t^3+12t+10 & 4t+5 & 1
\end{array}$$

M「そうか．$a_1 = 1$，$a_2 = 2$ で,$n \geqq 3$ のとき，

$$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$$

を満たす数列はペル数列と呼ばれているのだけれど，それに似ていますね．うまい名前が見つからないので，ウエイト t の 3 ペル数列とでも呼びましょうか．そして簡単に，3 ペル数列 $(w = t)$ と書きましょう．まだ証明はできていないけど，定理が作れましたね.」

ユウキ「えーと，定理を書くと...」

定理（$P[t]$ 三角形と 3 ペル数列 $(w = t)$ との関係） $P[t]$ 三角形の右斜め上方向への和から得られる数列は，3 ペル数列 $(w = t)$ である．

上の定理の証明は，$P[t]$ 三角形の定理を使うとできる．数学的帰納法もそうであるが，証明には，不慣れな一般式の計算があり高校生年代には大変である．しかし，自分が見つけた定理だからこそ，このような計算も辛抱強くやることができる．

2.10 パスカル三角形の中の母関数

与えられた数列 $\{a_n\}$ に対して，$\varphi(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$ を $\{a_n\}$ の母関数と呼ぶ．たとえば，パスカル三角形の 1 段目の数列 $\{1, 1\}$ の母関数は $1 + x$ であり，$\{1, 2, 1\}$ の母関数は $1 + 2x + x^2 = (1 + x)^2$ である．一般に，パスカル三角形の n 段目の数列 $\{{}_n\mathrm{C}_0,\ {}_n\mathrm{C}_1,\ \cdots,\ {}_n\mathrm{C}_n\}$ の母関数は $(1 + x)^n$ である．それでは，パスカル三角形の n 列目の母関数は一体どういうものであろうか？

まず，0 列目はすべて 1 からなるので，この母関数は $\varphi(x) = 1+x+x^2+\cdots$

である．そこで，$\varphi_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$ と置き，次のような計算を行う．

$$\begin{array}{rcl} \varphi_n(x) & = & 1 + x + x^2 + \cdots + x^n \\ -)\ x\ \varphi_n(x) & = & \phantom{1 +{}} x + x^2 + \cdots + x^n + x^{n+1} \\ \hline (1-x)\ \varphi_n(x) & = & 1 \phantom{{}+ x + x^2 + \cdots + x^n} - x^{n+1} \end{array}$$

よって，

$$\varphi_n(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

である．$|x| < 1$ を仮定すると，$n \to \infty$ のとき，$x^{n+1} \to 0$ であり，$\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ であるので，

$$\varphi(x) = \frac{1}{1 - x}$$

がいえる．つまり，$|x| < 1$ という条件のもとでは，パスカル三角形の 0 列目の母関数は $\varphi(x) = (1 - x) - 1$ なのである．以下，$|x| < 1$ は常に仮定しておこう．

パスカル三角形の 1 列目の母関数を求めてみよう．そのために $\varphi(x)^2$ を計算すればよい．つまり，

$$\begin{aligned} \varphi(x)^2 &= (1 + x + x^2 + \cdots + \cdots)(1 + x + x^2 + \cdots + \cdots) \\ &= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots \end{aligned}$$

である．よって，1 列目の母関数は，

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{(1 - x)^2} = (1 - x)^{-2}$$

である．

2 列目の母関数が $\varphi_n(x) = \frac{1}{(1-x)^3} = (1 - x)^{-3}$ ことはだれでも予想できよう．実際，

$$\begin{aligned} \varphi(x)^3 &= (1 + x + x^2 + \cdots + \cdots)(1 + 2x + 3x^2 + +4x^3 \cdots + \cdots) \\ &= 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \cdots \end{aligned}$$

となるからである．そして，同様にして n 列目の母関数が

$$\varphi(x) = \frac{1}{(1-x)^{n+1}} = (1-x)^{-(n+1)}$$

であることが示される．

2.11 $P[t]$ 三角形の中の母関数

ユウキ「$P[1]$ 三角形，つまりピラミッドキューブ数の三角形の中の n 列の母関数を考えてみました．n 段の方はよく分かりませんでした.」

M「聞きましょう.」

ユウキ「まず，$|x| < 1$ を仮定します．そして，0 列目の母関数はパスカル三角形と同じなので，$\varphi(x) = (1-x)^{-1}$ です．1 列目の母関数は $1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + 9x^4 + \cdots$ です．これをどのような単純な式で表現できるかです.」

M「そうですね.」

ユウキ「それは簡単で，パスカル三角形の 0 列目と 1 列目をうまく使います．つまり，P_0 と P_1 をそれぞれパスカル三角形の 0 列目，1 列目の母関数として，$T = \varphi(x) - 3P_0$ を計算すると，

$$\begin{array}{rcl} \varphi(x) & = & 1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + 9x^4 + \cdots \\ -)\ 3xP_0 & = & \quad\;\; 3x + 3x^2 + 3x^3 + 3x^4 + \cdots \\ \hline T & = & 1 \qquad\quad + 2x^2 + 4x^3 + 6x^4 + \cdots = 1 + 2P_1 \end{array}$$

となります．これは，

$$\varphi(x) - \frac{3}{1-x} = 1 + \frac{2x^2}{(1-x)^2}$$

であることから，最終的に

$$\varphi(x) = 1 + \frac{2x^2}{(1-x)^2} + \frac{3}{1-x} = \frac{1+x}{(1-x)^2}$$

が得られます.」

M「パスカル三角形の 0 列目と 1 列目を使うとは，なかなかでしたね.」

ユウキ「2 列目の母関数は $\varphi(x) = 1 + 5x + 13x^2 + 25x^3 + 41x^4 + 61x^5 + 85x^6 + \cdots$ です．今度は，パスカル三角形の 1 列目 P_1 と 2 列目 P_2 をうまく使います．つまり，$T = \varphi(x) - 5xP_1 - (3x^2 + x^3)P_2$ を計算すると，

$$\begin{array}{rcl} \varphi(x) & = & 1 + 5x + 13x^2 + 25x^3 + 41x^4 + 61x^5 + 85x^6 + \cdots \\ 5xP_1 & = & 5x + 10x^2 + 15x^3 + 20x^4 + 25x^5 + 30x^6 + \cdots \\ -)\ 3x^2P_2 & = & 3x^2 + 9x^3 + 18x^4 + 30x^5 + 45x^6 + \cdots \\ \hline T & = & 1 \qquad x^3 + 3x^4 + 6x^5 + 10x^6 + \cdots \end{array}$$

です．$T = 1 + x^3P_2$ であることから

$$\varphi(x) - \frac{5x}{(1-x)^2} - \frac{3x^2}{(1-x)^3} = 1 + \frac{x^3}{(1-x)^3}$$

である．したがって，

$$\varphi(x) = 1 + \frac{5x}{(1-x)^2} + \frac{3x^2 + x^3}{(1-x)^3} = \frac{(1+x)^2}{(1-x)^3}$$

となります．一般につぎのようにまとめることができました.」

定理（$P[t]$ 三角形の中の母関数） $P[t]$ 三角形の n 列 $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ の母関数 φ_n は，$|x| < 1$ のとき，

$$\varphi_n = \frac{(1+tx)^{n-1}}{(1-x)^n}$$

M「美しい定理が得られましたね.」

ユウキ「正確に証明するのはどうしたらいいんでしょう.」

M「マクローリン展開を使えばいいと思います.」

その後，マクローリン展開を勉強し，その数日後に上の定理は証明された．また，ユウキは 3 ペル数列 $(w = t)$ の母関数についても同様な計算を行い次の定理を得た.

定理（3 ペル数列 ($w = t$) の母関数） 3 ペル数列 ($w = t$) の母関数の母関数 ψ_n は，$|x| < 1$ のとき，

$$\psi_n = \frac{1}{1 - x - x^2 - tx^3}$$

2.12 3 ペル数列 ($w = t$) の分数列

3 ペル数列 ($w = t$) は $a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_3 = 2$ で,$n \geqq 4$ のとき，

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + ta_{n-3}$$

を満たす数列であった．$t = 0$ のときはフィボナッチ数列 $\{F_n\}$ である．$\{F_n\}$ は，具体的に書くと，

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 54,\ \cdots$$

となるが，分数列 $\{F_{n+1}\}/\{F_n\}$ は n が増大するにつれ黄金比 τ に収束していくことが知られている．つまり，

$$\frac{1}{1},\ \frac{2}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{3},\ \frac{8}{5},\ \frac{13}{8},\ \frac{21}{13},\ \frac{54}{21},\ \cdots, \to \tau$$

である．

ところで，黄金比 τ は $\tau = (-1 + \sqrt{5})/2$ であり，方程式 $1 - x - x^2 = 0$ の正の解である．この方程式の右辺の整式 $1 - x - x^2$ は，$t = 0$ なので，定理（3 ペル数列 ($w = t$) の母関数）の母関数の分母に出現し興味深い．

そこで，3 ペル数列 ($w = t$)$\{a_n\}$ の分数列 $\{a_n\}/\{a_{n+1}\}$ の収束値も方程式 $1 - x - tx^2 = 0$ に関係あるのでは？と予想したくなる．

まず，第 1 に $\{a_{n+1}\}/\{a_n\}$ が収束するかどうかという問いがたつ．しかしこれは高校生には少し難しい問題である．数列の基礎理論を学ぶとコーシー

の判定法といわれるものがあり，それを使うとある値に収束することが証明できる．

それでは，どのような値に収束するかであるが，これは比較的簡単である．漸化式 $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + ta_{n-3}$ のまず，両辺を a_n で割ると，

$$1 = \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_{n-2}}{a_n} + t\frac{a_{n-3}}{a_n}$$

となる．さらに変形して，

$$1 = \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_n} + t\left(\frac{a_{n-3}}{a_{n-2}} \cdot \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_n}\right)$$

を得る．$n \to \infty$，つまり n が増大するにつれ，a_{n-3}/a_{n-2}，a_{n-2}/a_{n-1} も a_{n-1}/a_n もすべて同じ値 x に収束する．すなわち，x は方程式 $1 = x + x^2 + tx^3$ を，つまり，x は方程式

$$1 - x - x^2 - tx^3 = 0$$

みたす正の値といえるのである．そして，それは，定理（3ペル数列 $(w=t)$ の母関数）の母関数の分母に出現する．

さて，関数 $f(x) = 1 - x - x^2 - tx^3$ を考えよう．$x = 0$ のとき $f(0) = 1$ であり，$x = 1$ のとき $f(1) = -1 - t < 0$ である．ということは，$f(x)$ が 0 となる x は 0 と 1 の間である.「$f(x)$ が 0 となる正の数 x は他にあるだろうか？」この問いに対しては，”微分”が有効的である．$f(x)$ を x で微分する．この操作で得られた関数を $f'(x)$ と書くと，

$$f'(x) = -1 - 2x - 3tx^2$$

となる．$x > 0$ であるので $f'(x) < 0$ である．これは，微分の理論を使うと，$x > 0$ で $f(x)$ は常に減少する関数であることを意味するのである．つまり，先の問いに関する答えが得られた．それは，

「$f(x)$ が 0 となる正の数 x は 0 と 1 の間に一つしか存在しない」

ということである．したがって，

定理（3 ペル数列 $(w=t)$ の分数列の収束値） 3 ペル数列 $(w=t)\{a_n\}$ の分数列 $\{a_n\}/\{a_{n+1}\}$ は収束し，収束値を $\tau(t)$ とすると，それは，方程式 $1-x-x^2-tx^3=0$ のただ一つの正の解である．

以上の議論より，3 ペル数列 $(w=t)\{a_n\}$ の分数列の収束値 $\tau(t)$ は上のように重要な数である．特に，$t=0$ のとき $\tau(0)$ は黄金比という特別な名前がついていることから考えると，$\tau(t)$ もそれなりの名前を付けられてもよいのではないかという気にもなる．ユウキの研究から得られたので ”t 次-ユウキ数 ” なんて呼ばれれば勇気百倍である．