Chapter 1

九九からはじまる研究

1.1　9の段の不思議

日本の小学2年生は，算数教育にとってとっても大切な時期である．それは九九を学習するからである．そして，我々日本人のほとんどが大人になっても確かに身に付けている格調高い教養，その一つが九九の計算である．

九九を覚えたての頃はなかなか気付かないのであるが，9の段にはとっても楽しい法則が潜んでいる．

$$9\times 1=9,\quad 9\times 2=18,\quad 9\times 3=27,\quad 9\times 4=36,\quad 9\times 5=45$$
$$9\times 6=54,\quad 9\times 7=63,\quad 9\times 8=72,\quad 9\times 9=81,\ 9\times 10=90$$

わかっている人も多いと思うが，十の位と一の位の和が全て9となっている．すなわち，

$$\begin{aligned} 9 &= 1+8=2+7=3+6=4+5 \\ &= 5+4=6+3=7+2=8+1=9+0. \end{aligned}$$

また，9×5 までの部分とそれ以降は答えの数字が対称的であり，それらのペアの数を足すと全て99となる．すなわち，

$$09+90=18+81=27+72=36+63=45+54=99.$$

【ヒント！】　研究題材は，それぞれ学生のレベルにあったものがよい．それは思いついたとき，ある程度簡単に計算ができるものがよい．あまりにも自分のレベルから遠く，どのように計算してよいのかも分からないものだとたちまち意欲を失う．

1.2　その他，どんな不思議があるか？

この問いは我々素人が数学を研究する上で，最も大切な呪文となる．9 の段について,「その他，どんな不思議があるか？」数学クラブ男子 3 人組 (赤松，山本，小林) に聞いてみた．しばらくして，赤松が答えた．

赤松「あっ！　$9 + 18 + \cdots + 81 + 90 = 495$ です.」

山本「何が面白いの？」

赤松「だって，$495 + 99 = 594$ になっていて数字が反転している.」

山本「そんなこと思いつくんだ！スゲー」

山本は感心した．突然，小林が 2 人の会話に分け入った．

小林「赤松の考えは発展できるぞ．$495 \div 99 = 5$，$594 \div 99 = 6$ だから，$4 \times 99 = 396$，396 を反転させると $693 \div 99 = 7$ で, $3 \times 99 = 297$，反転させると $792 \div 99 = 8$, さらに $2 \times 99 = 198$，$891 \div 99 = 9$ となるよ．そして，$1 \times 99 = 99$ で終わり.」

【ヒント！】　この後，赤松, 山本, 小林の 3 人の会話がどのように発展したか，賢明な読者はすでに想像がついていることだろう．さらに，これ以外の不思議をなるべくたくさん発見し，それを列挙して整理しておくことが大切だ．

1.3 9の段だけが特別か?

数学における研究テーマの 1 つに"一般化"というものがある．いま，九九を題材にして，特に 9 の段をリサーチした．そこには不思議な法則や性質がたくさん潜んでいる．しかし，発見した法則や性質が 9 の段に限ったことなのか，それともどの段においても共通にいえる法則や性質があるのか，といったことを議論することは"一般化"という観点から重要である．

前の節で，数学クラブの男子 3 人が議論していた法則について考えてみよう．

小林「$1 \times 99 = 99$, $2 \times 99 = 198$, $3 \times 99 = 297$, $4 \times 99 = 396$, $5 \times 99 = 495$, $6 \times 99 = 594$, $7 \times 99 = 693$, $8 \times 99 = 792$, $9 \times 99 = 891$ は反転数のペアーが見つかる．この点を他の段でも調べてみよう.」

赤松「$1 \times 22 = 22$, $2 \times 22 = 44$, $3 \times 22 = 66$, $4 \times 22 = 88$, $5 \times 22 = 110$, $6 \times 22 = 132$, $7 \times 22 = 154$, $8 \times 22 = 176$, $9 \times 22 = 198$ うーん.」

山本「表にまとめてみよう．まず 2 桁九九と呼んで表を作ると,」

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
11	11	22	33	44	55	66	77	88	99
22	22	44	66	88	110	132	154	176	198
33	33	66	99	132	165	198	231	264	297
44	44	88	132	176	220	264	308	352	396
55	55	110	165	220	275	330	385	440	495
66	66	132	198	264	330	396	462	528	594
77	77	154	231	308	385	462	539	616	693
88	88	176	264	352	440	528	616	704	792
99	99	198	297	396	495	594	693	792	891

山本「結構面白いなあ．3 桁九九の表を作ると....」

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
111	111	222	333	444	555	666	777	888	999
222	222	444	666	888	1110	1332	1554	1776	1998
333	333	666	999	1332	1665	1998	2331	2664	2997
444	444	888	1332	1776	2220	2664	3108	3552	3996
555	555	1110	1665	2220	2775	3330	3885	4440	4995
666	666	1332	1998	2664	3330	3996	4662	5328	5994
777	777	1554	2331	3108	3885	4662	5439	6216	6993
888	888	1776	2664	3552	4440	5328	6216	7104	7992
999	999	1998	2997	3996	4995	5994	6993	7992	8991

小林「9 の段のように反転する数字は他の段には見つからないけど... 思いついた！」

赤松「あーそうかあ」

小林「そうそう．赤松，俺に言わせてくれ．まず，2 桁九九の表を考えまーす．9 の段は上から 1 番目と下から 1 番目のペアー，上から 2 番目と下から 2 番目のペアーというように，上下ペアーをつくるとその和がすべて 990，8 の段の上下ペアーの和は 880，7 の段の上下ペアーの和は 770 となっている．つまり，

$$99 + 891 = 198 + 792 = 297 + 693 = 396 + 594 = 495 + 495 = 990$$

$$88 + 792 = 176 + 704 = 264 + 616 = 352 + 528 = 440 + 440 = 880$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$22 + 198 = 44 + 176 = 66 + 154 = 88 + 132 = 110 + 110 = 220$$

$$11 + 99 = 22 + 88 = 33 + 77 = 44 + 66 = 55 + 55 = 110$$

そして，3 桁九九の表では，9 の段でのの上下ペアーの和が 9990，8 の段は 8880，7 の段は 7770 となっている．

赤松「えーと... そんなんあたりまえじゃねえ？　小林の言った上下ペアーっていうのは，2 桁九九の表の場合だと，n 段を考えると常に 110 倍し

てるわけだし，3桁九九の表の場合だと，n段に1110倍してるわけだから.」

山本「少し観点が違うんだけど，2桁九九の表の22の段では，2の段の数字が3桁と1桁に現れる．そして2桁の数字は$2, 4, 6, 8, 1, 3, 5, 7, 9$と並んでいる．33の段も，3の段の数字が3桁と1桁に現れる．そして2桁の数字は$3, 6, 8, 3, 6, 9, 3, 6, 9$と並んでいる.」

赤松「すげー．44の段も，4の段の数字が3桁と1桁に現れてる? あれ？44×7だけが違う．どうする？」

山本「44×7の2桁の数字を10と考えればいいんだよ．そうすると，2桁の数字は$4, 8, 3, 7, 2, 6, 10, 5, 9$と並ぶ.」

小林「さすが，山本！その考えでいけば，55の段の2桁の数字は

$$5, 1, 6, 2, 7, 3, 8, 4, 9$$

で，66の段の2桁は

$$6, 3, 9, 6, 3, 9, 6, 12, 9$$

で，77の段の2桁は

$$7, 5, 3, 10, 8, 6, 13, 11, 9$$

で，88の段の2桁は

$$8, 7, 6, 5, 4, 12, 11, 10, 9.$$

そして99の段の2桁は

$$9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9$$

となる.」

赤松「中間の数だけ整理してみよう.」

2 桁九九の中間数（2 桁目）の表

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
11	1	2	3	4	5	6	7	8	9
22	2	4	6	8	1	3	5	7	9
33	3	6	9	3	6	9	3	6	9
44	4	8	3	7	2	6	10	5	9
55	5	1	6	2	7	3	8	4	9
66	6	3	9	6	3	9	6	12	9
77	7	5	3	10	8	6	13	11	9
88	8	7	6	5	4	12	11	10	9
99	9	9	9	9	9	9	9	9	9

3 桁九九の中間数（2, 3 桁目）の表

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
111	11	22	33	44	55	66	77	88	99
222	22	44	66	88	11	33	55	77	99
333	33	66	99	33	66	99	33	66	99
444	44	88	33	77	22	66	110	55	99
555	55	11	66	22	77	33	88	44	99
666	66	33	99	66	33	99	66	132	99
777	77	55	33	110	88	66	143	121	99
888	88	77	66	55	44	132	121	110	99
999	99	99	99	99	99	99	99	99	99

3 人はしばらく表を眺めていた.

小林「2 桁九九の中間数の表のしくみがわかった.」

赤松「うそー」

小林「九九をして各桁の和が中間数だ. たとえば, 44×6 の中間数は 6 となっているが, $4 \times 6 = 24$ で $2 + 4 = 6$.」

赤松「おおー, 確かに, 44×7 の中間数は 10 となってる. そして $4 \times 7 = 28$ で $2 + 8 = 10$ だわ. だけど, 筆算を考えると, そんなんやっぱり当たり前じゃない？」

小林「確かになあ. うーん....」

小林「とりあえず, 3 桁九九の中間数の表のしくみ言っていい？　2 桁九

九の中間数の表の値を1桁スライドさせて足せばいいんだ．赤松，見とけよ．たとえば，666×5 の中間数は33となっているが，それは $6 \times 5 = 30$ から出た3から $3 \times 10 + 3 = 33$ と計算すればいい．666×8 の場合だと，中間数は132となっているが，それは $6 \times 8 = 48$ から出た12から $12 \times 10 + 12 = 132$ となるわけよ．」

赤松「おおー，すげ，すげ．ということは，4桁九九の中間数も表を見なくてもわかるってことか．6666×8 の中間数は，っと．12を2回スライドさせればいいんだから，$12 \times 100 + 12 \times 10 + 12 = 1332$ だ．一応チェックしてみよう．$6666 \times 8 = 53328$ だから確かに中間数は1332になる．納得 !! 」

小林「赤松，また気づいた．スライドの計算なんだけど，結局 12×111 を計算すればいいんだわ．つまり，同じ数字を1桁スライドさせることは，それに11を掛けることで，同じ数字を2桁スライドさせることは，それに111を掛けることなんだ.」

赤松「わかったよ．小林君．$77,777,777 \times 6$ の中間数は，8桁九九だから $1,111,111$ を掛ければいい．つまり，$7 \times 6 = 42$ なので，$6 \times 1,111,111 = 6,666,666$ である．ＯＫ..... まあ,.... だけど筆算の仕組みを考えればそれもやっぱり当たり前 ?!! 」」

小林「確かに，うーーーーん.」

M「みんなすごいね．1111と1だけでできている数字のことをレプユニット数といいます．1は1桁のレプユニット数，11は2桁のレプユニット数です.」

小林「そうかあ．2桁九九も3桁九九も全部レプユニット数に関係しているってことかあ.」

山本「あのー．全然関係ないんだけど，2桁九九の99の段を見ると，$\sin 99^\circ + \cos 891^\circ = \sin 198^\circ + \cos 792^\circ = \cdots = \sin 495^\circ + \cos 495^\circ = 0$ となってる．そして，3桁九九の999の段も同じことがいえる.」

赤松と小林「えー ?!! 」

【ヒント！】 素人の数学研究においては何よりもデータ観察が重要であ

る．データを睨んでいるといろいろな法則や性質を発見できるからだ．同時に，発見した性質が今後発展していくかどうかも考える必要がある．

さて，研究が独り善がりにならないためにも適切なアドバイスを受けることが重要である．身近にいる数学に詳しい人にアドバイスを貰う．そうすると研究すべきテーマがまた一つ見つかることになる．

ここで，九九の研究において一つだけ提案をしよう．それは「m 進数の九九を考えたらどうか」という研究方針である．勿論，アドバイスがなくともこの研究方針を自分自身で思いつくなら，それはすばらしいことである．

1.4　9 進数の九九

赤松「確かに m 進数の九九でも同じことが成り立つかもしれない．俺が試しに 9 進数の九九？，八八？　九九でいいか！の表を作るよ．うーむ．けっこう大変 !!」

9 進数の九九の表

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	3	4	5	6	7	8
2	2	4	6	8	11	13	15	17
3	3	6	10	13	16	20	23	26
4	4	8	13	17	22	26	31	35
5	5	11	16	22	27	33	38	44
6	6	13	20	26	33	40	46	53
7	7	15	23	31	38	46	54	62
8	8	17	26	35	44	53	62	71

赤松「とりあえず，9 進数の九九の表を見ると，やっぱり，n の段の上下ペアーの和はすべて $n0$ となってる．」

小林「なっ？なんで？　$8 + 71 = 79$?と違うの？」

赤松「9 進数だから数字の 9 は繰り上がるから，80．でしょ！」

小林「ＯＫ！わかった．他の段も確かにそうなってる.」

赤松「ついでに，9 進数の 2 桁九九の表と 3 桁九九の表も作ると... 計算めんどくせー．ひえー，誰か手伝って !! 」

小林「赤松．さっきの中間数の理論，つまり筆算の理論を使えばいいんじゃない．たとえば，9 進数の 2 桁九九だと，$7 = 38$ だから中間数は $3 + 8 = 12$. よって，$77 = 428$ となる．9 進数の 3 桁九九だと，中間数は $12 \times 11 = 132$ だから $777 = 4328$.」

赤松「小林．やっぱすげー」

9 進数の 2 桁九九の表

	1	2	3	4	5	6	7	8
11	11	22	33	44	55	66	77	88
22	22	44	66	88	121	143	165	187
33	33	66	110	143	176	220	253	286
44	44	88	143	187	242	286	341	385
55	55	121	176	242	307	363	428	484
66	66	143	220	286	363	440	516	583
77	77	165	253	341	428	516	604	682
88	88	187	286	385	484	583	682	781

9 進数の 3 桁九九の表

	1	2	3	4	5	6	7	8
111	111	222	333	444	555	666	777	888
222	222	444	666	888	1221	1443	1665	1887
333	333	666	1110	1443	1776	2220	2553	2886
444	444	888	1443	1887	2442	2886	3441	3885
555	555	1221	1776	2442	3107	3663	4328	4884
666	666	1443	2220	2886	3663	4440	5216	5883
777	777	1665	2553	3441	4328	5216	6104	6882
888	888	1887	2886	3885	4884	5883	6882	7881

赤松「ふぅー．やっと完成！　」

小林「9 進数の 2 桁八八の表を見ると，やっぱり，8 の段の上下ペアーの和は 880，7 の段の上下ペアーの和は 770 となっている．つまり，n 段の上下

ペアーの和はすべて $nn0$ となってるんだ．その理由は，$11+88=22+77=33+66=44+55=110$ だからか．9 進数の 3 桁の九九も，もちろん同じ.」

赤松「たぶん，間違いなく，これは 9 進数以外でも全て成り立つことだ. たとえば 16 進数で九九を考える．10 以上の数字を A, B, C, D, E, F とする. C の段の $C\times 1$ から $C\times F$ までの計算結果は,

$$C,\ 18,\ 24,\ 30,\ 3C,\ 48,\ 54,\ 60,\ 6C,\ 78,\ 84,\ 90,\ 9C,\ A8,\ B4.$$

小林「ちょっちょっと！　赤松，どうしてそんな速く計算できるの？」

赤松「C は 16 に 4 足らないから，1 桁の数は 12 から 4 ずつ減らしていき，1 桁の数は 1 づつ増やしていけばいいじゃん．ねっ!．そうすると，CC の段の $CC\times 1$ から $CC\times G$ までの計算結果は，中間数の理論を使って

$$CC,\ 198,\ 264,\ 330,\ 3FC,\ 4C8,\ 594,\ 660,$$
$$71C,\ 7F8,\ 8C4,\ 990,\ A5C,\ B28,\ BF4.$$

となる.」

小林「俺もやりたい．たとえば，E の段の $E\times 1$ から $E\times F$ までの計算結果は，E が 16 に 2 足りないから，1 桁は E から 2 ずつ減らしていき，2 桁は E から 1 ずつ増やすと,

$$E,\ 1C,\ 2A,\ 38,\ 46,\ 54,\ 62,\ 60,\ 7E,\ 8C,\ 9A,\ A8,\ B6,\ C4,\ D2.$$

そして，EE の段の $EE\times 1$ から $EE\times G$ までの計算結果は，中間数の理論を使って

$$EE,\ 1DC,\ 2CA,\ 3B8,\ 4A6,\ 594,\ 682,\ 660,$$
$$85E,\ 94C,\ A3A,\ B28,\ C16,\ D04,\ DF2.$$

できた．E 一気持ち.」

山本「すげーなー．俺の見つけた 9 の段サインプラスコサイン法則はどうなのかなあ．うーーむ.」

1.5 これまでの整理と今後の方針

議論の中から出てきた内容がある程度固まってきたら，それらをきちんと整理して，今後何をすべきかを検討することが重要である．

まず，数学クラブの3人が議論した内容を整理しよう．

(1) 九九の表の研究において9の段の面白さに着目した．

(2) 偶然，9の段の和において，$9+18+\cdots+90=495$で，$9+18+\cdots+90+99=594$ことから495と594という反転数のペアーを発見した．

(3) この発見を発展させ，$99\times k$ $(k=1,2,\cdots,9)$までに同様な反転数のペアーが現れてくる現象があることを突き止めた．

(4) 反転数のペアーを調査するために$nn\times k$ $(k=1,2,\cdots,9)$と$nnn\times k$ $(k=1,2,\cdots,9)$という表を作成した．これらをそれぞれ2桁九九の表，3桁九九の表と呼んだ．

(5) 反転性のペアーに関しては$99\times k$ $(k=1,2,\cdots,9)$，$999\times k$ $(k=1,2,\cdots,9)$に関してのみ起こっている．

(6) そこで，n段，nn段, nnn段について，それぞれ，9段, 99段, 999段で起こった反転数のペアーと同じ位置ある数のペアを足してみると，すべて$nn0$という数が得られるという結果を得た．

(7) さらに，2桁九九の表のnn段においては，中間数というものにも興味があった．それについては，九九の表にでてくる数の1桁と2桁の数の和が関係し，3桁九九の表の中間数に関しては，2桁九九の表の中間数の11倍（レプユニット数倍）となっていることがわかった．

(8) これまでの結果を踏まえ，m進数での九九も研究できるのではという提案を受けて，調査してみるとやはり，m進数においても上の(1)〜(7)までの現象は確かに起こっていた．

以上の発見は振り返ってみると，数学的にはそれほど難しいものではなく，研究するという立場からは，これ以上の発展は望めそうもない．このこ

とは数学クラブの学生も同意見であった．そこで，今後の方針のために，新しい方向性を考える必要がでてきた．それらの問題を整理しよう．

（方針１）$\sin 99^\circ + \cos 891^\circ = \sin 198^\circ + \cos 792^\circ = \cdots = \sin 495^\circ + \cos 495^\circ = 0$，$\sin 999^\circ + \cos 8991^\circ = \sin 1998^\circ + \cos 7992^\circ = \cdots = \sin 4995^\circ + \cos 4995^\circ = 0$ は発展できるか.

（方針２）9 の段，99 の段，999 の段には反転数のペアーがあった．反転数に関する発展的な研究はできるか.

赤松「あれーっ？ $22 \times 6 = 44 \times 3 = 132$ になっている..... そうか，わかった．11 がキーとなっている．$77 \times 6 = 462$ だけど，これを 11×42 と考えると，462 の反転数 264 は 11×24 に等しい．つまり，11×42 の反転数は 11×24 だね.」

小林「ちょっと待って，111 でも言えるんじゃない？ $111 \times 123 = 13653$ で，$35631 \div 111 = 321$．他の数でやってみると，$111 \times 215 = 23865$ で，$56832 \div 111 = 512$ だ．すげー．赤松！やったな !! 」

1.6 反転数に関する予想と問題の整理

反転数に関する数学クラブの 3 人の予想は正しいのであろうか．その後の議論を少し覗いてみよう．

小林「$11 \times 312 = 3432$ で，$2343 \div 11 = 213$．赤松の理論は間違いないみたい.」

山本「ちょっといいですか．$11 \times 567 = 6237$ だけど，$7326 \div 11 = 666$ なんだけど...」

赤松「えっえーっ！ $11 \times 998 = 10978$ で，$87901 \div 11 = 7991$．ガーン !! 全然違う．だけど反転した数は必ず 11 で割れるんじゃないの？」

小林「ということは，111 でも同じことが言える．例えば，$111 \times 998 =$

110778 で，$877011 \div 111 = 7901$．つまり，111 の倍数で得られた数の反転数はまた 111 で割れる．美しい !! 」

山本「$111 \times 1599 = 17489$ で，$98471 \div 111 = 887.126.....$」

小林「ちくしょう！　反転数の理論ができない.」

よく知られている 3 の倍数の定理を紹介しよう.

3 の倍数の定理　整数 a が 3 の倍数であることの必要十分条件は，a に現れる各桁の数の総和が 3 の倍数となっていることである.

今議論している反転数に関しては，意味が少し異なるが，次の定理が上の定理からすぐに得られる.

3 と 9 の倍数の反転数の定理　整数 a に対して $3a$ の反転数は，また 3 の倍数である．さらに，$9a$ の反転数は，また 9 の倍数である.

レプユニット数 11 に関する反転数の予想は次のようにまとめられる.

11 の倍数の反転数の予想　整数 a に対して $11a$ の反転数は，また 11 の倍数である.

さらに，n 桁のレプユニット数 R_n を考える．このとき，R_n に関する反

転数に関して次の問題が提示される.

R_n 倍数の反転数の問題　整数 a に対して $R(n)a$ の反転数が，また $R(n)$ の倍数となる条件は何か.

そして，最初の研究動機に立ち返るならば，R_n 倍数の反転数の問題はより詳細に，次の問題となる.

R_n 倍数の反転数の問題 2　$\bar{a}$ を整数 a の反転数とする．このとき，aR_n の反転数が，$\bar{a}R_n$ に等しいとき，a はどのような数か.

山本「小林君．ちょっと聞いてや.」

小林「何？」

山本「$11\times 246 = 2706$, $11\times 624 = 7062$, $11\times 57 = 0627$, $11\times 570 = 6270$. ぐるぐる回ってる.」

n 桁の整数 a の各桁の数を $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_2, a_1$ とし，$a = (a_n, a_{n-1}, \cdots, a_2, a_1)$ と表す．a の変換 $T(a)$ を $T(a) = (a_{n-1}, \cdots, a_2, a_1, a_n)$ とする．簡単にいえば，$T(a)$ とは k 桁の数を $k+1$ 桁に移し，n 桁の数は 1 桁移す操作を表す. また，$T^2(a) = (a_{n-2}, \cdots, a_1, a_n, a_{n-1})$ とすることで，$T^k(a)$ も定義できる. $T^k(a)$ を a の回転数と呼ぶことにする．山本が発見した事実は次のような問題となる.

$R(n)$ **倍数の回転数の問題**　整数 a に対して aR_n のすべての回転数 $T^k(aR_n)$ が，また R_n の倍数となる条件は何か.

以上のようにして，だれでも知っている九九の面白い性質から，最初は当たり前であるような議論でもそれを積み重ねるうちに，ある程度，高校数学として十分な一つの研究テーマとして確立していくのである.

1.7　余談（角度とは何か）

9 の段の $\sin 99^\circ + \cos 891^\circ = 0$ となるサインプラスコサインが 0 となる法則は，他の段には現れないのであろうか．多分参考になると思うので，少しだけヒントとなることを提示しよう.

M「山本君，角度とは何かを考えてみようよ.」

山本「えっ？どういうことですか？」

M 「円を一周すると何度ですか.」

山本「360° ですけど.」

M 「それは本当に正しいですか.」

山本「ええーっ !! 」

果たして，サインプラスコサインが 0 となる法則はあるのか？以上の会話をヒントとし，この章を閉めることにする．成功を祈る.