

Pascal Zeta-Function の研究

津山工業高等専門学校

中野 日向

(情報工学科 3年)

1. はじめに

1年生の時、整数論に関する本[K]を眺めていて、リーマンゼータ関数 $\zeta(s) = 1^{-s} + 2^{-s} + 3^{-s} + \dots$ から得られる等式 $1 + 1 + 1 + \dots = -\frac{1}{2}$, $1 + 2 + 3 + \dots = -\frac{1}{12}$ に、驚きと不思議な興味を覚えた。これらは発散級数であるにも関わらず値が定められている。後で知ったことであるが、この計算結果は解析接続によって定まるものであり、現代物理においては、くり込み理論というものに関係があるということである。そして自分もこのような発散級数の研究がしたいと考えていた。

今回の研究は、「数の事典」という本に載っていたライプニッツの調和三角形がきっかけとなった。

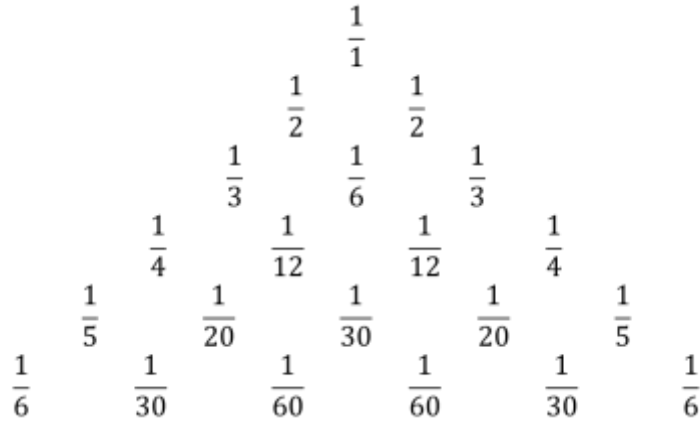


図1 (ライプニッツの調和三角形)

上の図がライプニッツの調和三角形の一部であるが、これは、どの数もそのすぐ左下の数から右下斜めに無限に続く数列の和になるという性質を持つ。例えば、 $\frac{1}{1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots$ や $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{30} + \frac{1}{60} + \dots$ などとなっている。このことから、例えば $L(s) = \frac{1}{2^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{12^s} + \frac{1}{20^s} + \dots$ という新しいタイプのゼータ関数を考えれば、 $L(1) = 1$ が得られ、さらに $L(0)$, $L(-1)$, $L(-2)$ などについては、どのような値をとるのか、といった研究ができるのではないかと考えた。そして研究を進めていくうちに、この研究の核となるものが、パスカル三角形からつくられるゼータ関数であることに気が付いた。

パスカル三角形は、0列目がすべて1からなり、1列目は自然数が並ぶ。それを

$$P_1(s) = 1^{-s} + 2^{-s} + 3^{-s} + \dots$$

とする。明らかに $P_1(s)$ はリーマンゼータ関数 $\zeta(s)$ である。

2列目は三角数が並ぶ。それを

$$P_2(s) = 1^{-s} + 3^{-s} + 6^{-s} + 10^{-s} + 15^{-s} + \dots$$

とする。3列目は三角錐数が並び、

$$P_3(s) = 1^{-s} + 4^{-s} + 10^{-s} + 20^{-s} + 35^{-s} + \dots$$

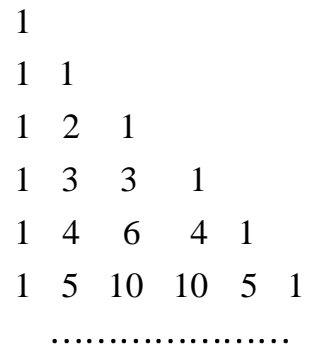


図2 (パスカル三角形)

とする. このようにして n 列目のパスカルゼータ関数 $P_n(s)$ が定義できる. 以下, パスカル三角形の n 列目から作られるゼータ関数 $P_n(s)$ のことを, n 列目のパスカルゼータ関数と呼ぶことにする.

今回の研究により,

$$P_2(-1) = 1 + 3 + 6 + \dots + \frac{n(n+1)}{2} + \dots = -\frac{1}{24}$$

$$P_2(-2) = 1^2 + 3^2 + 6^2 + \dots + \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2 + \dots = \frac{1}{240}$$

などの公式を得ることができた. そして, これらは一般化でき, s が負の整数であるとき, 以下の 2 列目と 3 列目から作られるゼータ関数 $P_2(s)$ と $P_3(s)$ の値に関する公式を得ることができた. 以下において,

記号 $\binom{a}{b}$ は a と b のコンビネーションを表し, 記号 $\left[\begin{smallmatrix} e \\ f \end{smallmatrix} \right]$ は e と f の第 1 種スターリング数を表す. 2 列目と 3 列目から作られるゼータ関数の公式は,

$$P_2(s) = 2^s \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-s}{k} \zeta(2s+k),$$

$$P_3(s) = 6^s \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{-s}{k} \binom{-s-k}{l} 2^k 3^l \zeta(3s+2k+l)$$

である. より一般に,

$$P_n(s) = (n!)^s \sum_{k_1, k_2, \dots, k_{n-1}=0}^{\infty} \binom{-s}{k_1} \binom{-s-k_1}{k_2} \dots \binom{-s-k_1-\dots-k_{n-2}}{k_{n-1}} \left[\begin{smallmatrix} n \\ 1 \end{smallmatrix} \right]^{k_1} \left[\begin{smallmatrix} n \\ 2 \end{smallmatrix} \right]^{k_2} \dots \left[\begin{smallmatrix} n \\ n \end{smallmatrix} \right]^{k_{n-1}} \zeta(ns + (n-1)k_1 + \dots + k_{n-1})$$

も導いた. 特に, $P_n(s)$ の公式から,

$$P_n(-1) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] \zeta(-k)$$

が得られた. これはフーリエ変換を思わせる式になっている.

以下に, 上に列挙した $P_n(s)$ の公式を論じ, 同時に研究で浮かび上がった多くの課題についても説明する.

2. フィボナッチゼータ関数 $F(s)$ について

本研究では, L. Navas[N] の論文で扱われた研究手法を参考に行っている. その概要を説明する.

まず, $\{F_n\}$ をフィボナッチ数列として,

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n^{-s}$$

を, フィボナッチゼータ関数と呼ぶ. そして, $\Phi(x) = \max\{n \geq 0 \mid F_n \leq x\}$ とすると, $F(s)$ は,

$$F(s) = s \int_0^{\infty} \Phi(x) x^{-s-1} dx \quad \dots \dots \dots (2.1)$$

であることが示された. そして, $F(s)$ が $\text{Re } s > 0$ で収束することを示した後, 複素平面全領域で解析接続できることが示された. さらに, $F(s)$ は無限個の点で極をもつ有理型関数であることも示された. その後,

整数 s に関する $F(s)$ の公式が研究された. φ を黄金比 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ とし, ビネの公式を使って,

$$F(s) = 5^{s/2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-s}{k} (-1)^{k(n+1)} \varphi^{-n(2+k)} \dots \dots \dots (2.2)$$

と変形する. ここで, 重要な点は, $\sigma = \text{Re } s$ とすると, 不等式

$$\sum_{n \geq 1, k \geq 0} \left| \binom{-s}{k} (-1)^{k(n+1)} \varphi^{-n(2+k)} \right| \leq (1 - \varphi)^{-|s|} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi^{-n\sigma} < \infty$$

が成り立つことから, 式(2.1)の総和の順序を変更した. これより, 公式

$$F(s) = 5^{s/2} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-s}{k} \frac{1}{\varphi^{s+2k} + (-1)^{k+1}} \dots \dots \dots (2.3)$$

が得られた. 以上が, Navas が行った研究で, 特に本研究に關係する部分である.

残念ながら, 本研究では, n 列目のパスカルゼータ関数 $P_n(s)$ に対して, フィボナッチゼータ関数 $F(s)$ での式(2.1)のような積分表示は得られていない. したがって, $P_n(s)$ が複素平面全体に解析接続可能なのかどうか分かっていない. しかし, 本研究では, これを仮定して研究を進めた.

3. 2 列目のパスカルゼータ関数 $P_2(s)$ について

主結果 1. s を負の整数とする. このとき, 2 列目のパスカルゼータ関数 $P_2(s)$ の値は,

$$P_2(s) = 2^s \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-s}{k} \zeta(2s+k)$$

で与えられる.

$P_2(s)$ が複素平面全体に解析接続可能であることを仮定して, 主結果 1 が, どのようにして得られるのか, について解説する. 以下の計算は L Navas [N]の研究手法を参考にした.

パスカル三角形の 2 列目は 3 角数の列 a_n であり, それは, $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$ で与えられる. 一方, a_n^{-s} を $(n+1)^{-s}$ の二項展開に注意して変形すると,

$$a_n^{-s} = \frac{n^{-s}(n+1)^{-s}}{2^{-s}} = 2^s n^{-s} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-s}{k} n^{-s-k} = 2^s \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-s}{k} n^{-2s-k}$$

となる. したがって, 2 列目のパスカルゼータ関数 $P_2(s)$ は,

$$P_2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-s} = 2^s \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-s}{k} n^{-2s-k}$$

となる. ここで総和の順序の交換を行う. このことが可能であるのかどうか課題として残る. しかし, これを信じ, 議論を続ける.

総和の順序が交換可能とすると,

$$P_2(s) = 2^s \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-s}{k} n^{-2s-k} = 2^s \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-s}{k} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2s-k}$$

となる。ここで、 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2s-k} = \zeta(2s+k)$ であるので、

$$P_2(s) = 2^s \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-s}{k} \zeta(2s+k) \quad \dots \dots \dots (3.1)$$

を得る。(主定理 1 の解説終)

主定理 1 より、2 列目のパスカルゼータ関数 $P_2(s)$ の値は、よく知られているリーマンゼータの値を用いて得られることを示している。さらに、負の整数 s については、式(3.1)の右辺は有限和となるため、意味を持つ。以下において、具体的な負の整数 s に関する $P_2(s)$ の値を求める。

(例 1) $P_2(-1) = -\frac{1}{24}$ であることを示す。

$$P_2(-1) = 2^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1}{k} \zeta(-2+k) = \frac{1}{2} \left\{ \binom{1}{0} \zeta(-2) + \binom{1}{1} \zeta(-1) \right\}$$

である。ここで、リーマンゼータの値 $\zeta(-2) = 0$, $\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$ を用いると、 $P_2(-1) = -\frac{1}{24}$ であることがわかる。

(例 2) $P_2(-2) = \frac{1}{240}$ であることを示す。

$$P_2(-2) = 2^{-2} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2}{k} \zeta(-4+k) = \frac{1}{4} \left\{ \binom{2}{0} \zeta(-4) + \binom{2}{1} \zeta(-3) + \binom{2}{2} \zeta(-2) \right\}$$

である。ここで、リーマンゼータの値 $\zeta(-4) = \zeta(-2) = 0$, $\zeta(-3) = \frac{1}{120}$ を用いると、 $P_2(-2) = \frac{1}{240}$ であることがわかる。

4. 3 列目のパスカルゼータ関数について

主結果 2. s を負の整数とする。このとき、3 列目のパスカルゼータ関数 $P_3(s)$ の値は、

$$P_3(s) = 6^s \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{-s}{k} \binom{-s-k}{l} \cdot 2^k \cdot 3^l \cdot \zeta(3s+2k+l)$$

で与えられる。

やはり、 $P_3(s)$ が複素平面全体に解析接続可能であることを仮定して、主結果 2 について解説する。

パスカル三角形の 3 列目は 3 角錐数の列 a_n であり、それは、 $a_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ で与えられる。一方、

a_n^{-s} を変形すると、

$$\begin{aligned}
a_n^{-s} &= \frac{n^{-s}(n+1)^{-s}(n+2)^{-s}}{6^{-s}} = 6^s n^{-s}(n^2+3n+2)^{-s} = 6^s n^{-s}\{(n+3)n+2\}^{-s} \\
&= 6^s n^{-s} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-s}{k} 2^k n^{-s-k} (n+3)^{-s-k} = 6^s \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-s}{k} 2^k n^{-2s-k} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{-s-k}{l} 3^l n^{-s-k-l} \\
&= 6^s \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{-s}{k} \binom{-s-k}{l} 2^k 3^l n^{-3s-2k-l}
\end{aligned}$$

となる。したがって、3列目のパスカルゼータ関数 $P_3(s)$ は、

$$P_3(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-s} = 6^s \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{-s}{k} \binom{-s-k}{l} 2^k 3^l n^{-3s-2k-l}$$

となる。総和の順序が交換可能であることを仮定すると、

$$P_3(s) = 6^s \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{-s}{k} \binom{-s-k}{l} 2^k 3^l n^{-3s-2k-l} = 6^s \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{-s}{k} \binom{-s-k}{l} 2^k 3^l \sum_{n=1}^{\infty} n^{-3s-2k-l}$$

となる。 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3s-2k-l} = \zeta(3s+2k+l)$ であるので、

$$P_3(s) = 6^s \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{-s}{k} \binom{-s-k}{l} 2^k 3^l \zeta(3s+2k+l)$$

を得る。(主定理2の解説終)

5. n列目のパスカルゼータ関数について

2列目と3列目のパスカルゼータ関数と同様の方法で、n列目のパスカルゼータの一般項に関する公式も得られた。ここでは結果だけ述べる。

主結果3. s を負の整数とする。このとき、以下が成り立つ。

$$P_n(s) = (n!)^s \sum_{k_1, k_2, \dots, k_{n-1}=0}^{\infty} \binom{-s}{k_1} \binom{-s-k_1}{k_2} \cdots \binom{-s-k_1-\dots-k_{n-2}}{k_{n-1}} \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}^{k_1} \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix}^{k_2} \cdots \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}^{k_{n-1}} \zeta(ns + (n-1)k_1 + \dots + k_{n-1})$$

特に、主結果3において、 $s = -1$ の場合を考えると、次の結果を得る。

主結果4. s を負の整数とする。このとき、以下が成り立つ。

$$P_n(-1) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \zeta(-k)$$

主結果4は、フーリエ変換を思わせる式になっている。つまり、 $P_n(-1)$ をゼータ関数 $\zeta(-k)$ で分解したとき、スペクトルとなる係数がスターリング数 $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ となっているのである。このことから、この逆変換公式ができないかという問題も考えられる。

主結果 3 を用いて, 具体的な $P_n(s)$ の値を $0 \leq n \leq 5, -5 \leq s \leq -1$ について計算した. その結果が以下である.

表 1 ($P_n(s)$ の値)

$n \setminus s$	-1	-2	-3	-4	-5
0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
1	$-\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{120}$	0	$-\frac{1}{252}$
2	$-\frac{1}{24}$	$\frac{1}{240}$	$-\frac{1}{2240}$	$\frac{1}{20160}$	$-\frac{1}{177408}$
3	$-\frac{19}{720}$	$\frac{2}{945}$	$-\frac{1207}{3991680}$	$\frac{2257}{60147360}$	$\frac{28631951}{190546836480}$
4	$-\frac{3}{160}$	$\frac{9}{8960}$	$-\frac{81}{2928640}$	$\frac{1647}{1394032640}$	$-\frac{71128520893}{61787987509248}$
5	$-\frac{863}{60480}$	$\frac{16}{31185}$	$-\frac{81400667}{14114580480000}$	$-\frac{17973043411}{19339689600000}$	$\frac{141828972683913871}{53292139226726400000}$

この表から読み取れることは, 各 n について, 符号に周期性があること, s が小さくなるにしたがい, $P_n(s)$ の値が 0 に近づいている点にある. これが一般的にいえるかどうかについては今後の課題として残された.

6. 実数に関するパスカルゼータ関数

これまで, パスカルゼータ関数 $P_n(s)$ の s はつねに負の整数値としてきたが, Γ 関数を用いることで, s を負の実数としても扱うことができる. すなわち, $\binom{-s}{k} = \frac{(-s)!}{k!(-s-k)!} = \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(k+1)\Gamma(1-s-k)}$ に注意すると, $P_2(s)$ に関する公式は以下となる.

$$P_2(s) = 2^s \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-s}{k}_{\Gamma} \zeta(2s+k) \quad \dots \dots \dots (5.1)$$

ここで, $\binom{-s}{k}_{\Gamma} = \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(k+1)\Gamma(1-s-k)}$ とした. ところで, ここで大きな問題が起こっている. それは, 式 (5.1) の右辺は収束するのかという問題である. これに関して, Srivastava [S] の研究結果を紹介する. それは, Ramanujan の結果などを用いたリーマンゼータ関数の無限和に関する研究で,

$$(1 - 2^{1-s})\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(s)_k \zeta(s+k)}{k! 2^{s+k}} \quad \dots \dots \dots (5.2)$$

というものである. ここで, $(s)_k = \frac{\Gamma(s+k)}{\Gamma(s)}$ である. 二つの式 (5.1) と (5.2) の右辺は非常に似ている式であ

り、これからの研究に対して指針を示すものと考えている。

ここでも、式(5.1)の収束性を仮定して、具体的な計算を行う。例えば、 $s = -0.1$ の場合、式(5.1)より、

$$P_2(-0.1) = 2^{-0.1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{0.1}{k}_{\Gamma} \zeta(-0.2 + k)$$

である。したがって、 $P_2(-0.1)$ の近似値

$$P_2(-0.1) = 2^{-0.1} \{0.1 \zeta(-0.2) - 0.045 \zeta(0.8) + 0.0285 \zeta(1.8) + \dots\} \sim -0.7985$$

が得られる。同様に計算して、 $P_2(-0.2)$ の近似値は、

$$P_2(-0.2) = 2^{-0.2} \{0.2 \zeta(-0.4) - 0.08 \zeta(0.6) + 0.048 \zeta(1.6) + \dots\} \sim -0.6791$$

となる。 $\binom{-s}{k}_{\Gamma}$ は k が大きくなるにつれ0に近づき、 $\zeta(k + 2s)$ は k が大きくなるにつれ1に近づくことが

分かっているため、右辺は収束するものと考えている。

下のグラフは、横軸が s 、縦軸が $P_2(s)$ としたときのグラフである。

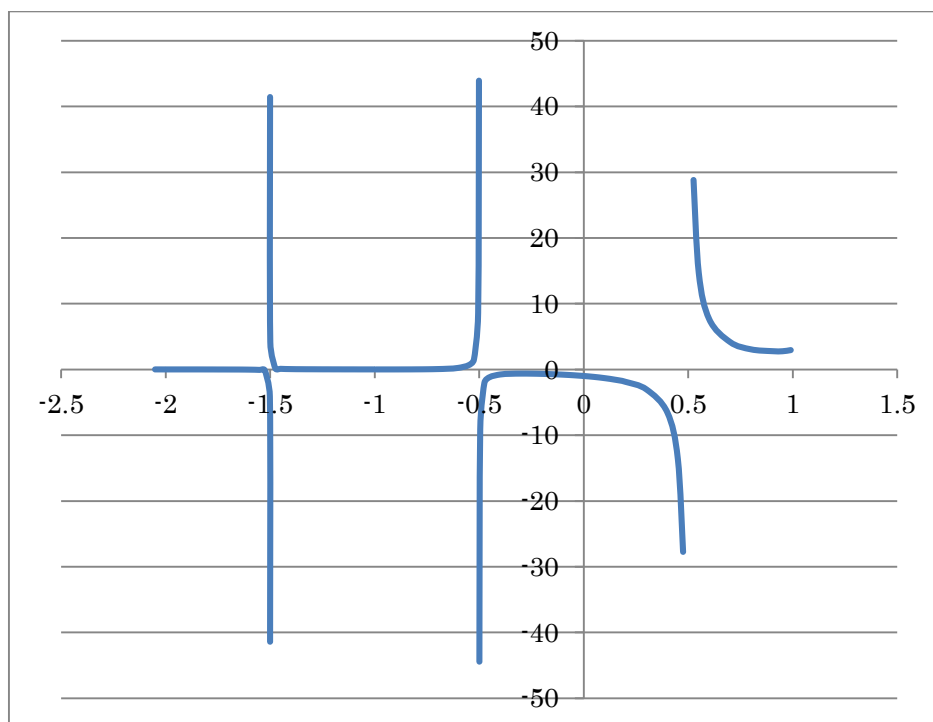


図3 ($P_2(s)$ のグラフ)

7. パスカルゼータ関数 $P_2(s)$ のグラフに関する考察

図3の $P_2(s)$ のグラフは、ガンマ関数のグラフ(図4)に非常に似ている。

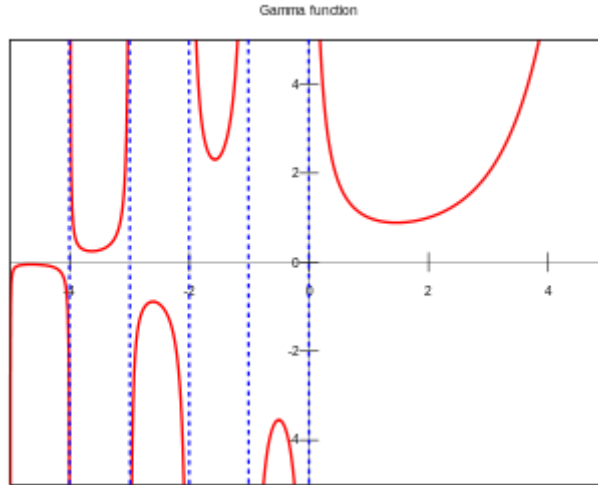


図4 (ガンマ関数のグラフ, 出典: Wikipedia)

特に, 類似性があるところは, $P_2(s)$ のグラフの $s = 0.5, 0, -0.5, -1.0, -1.5, -2.0$ の付近であるので, それについて考察する. $P_2(s)$ を計算すると,

$$\begin{aligned}
 P_2(0.5) &= 2^{0.5} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{0.5}{k}_{\Gamma} \zeta(1+k), & P_2(0) &= 2^0 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{0}{k}_{\Gamma} \zeta(0+k), \\
 P_2(-0.5) &= 2^{-0.5} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-0.5}{k}_{\Gamma} \zeta(-1+k), & P_2(-1) &= 2^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1}{k}_{\Gamma} \zeta(-2+k), \\
 P_2(-1.5) &= 2^{-1.5} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1.5}{k}_{\Gamma} \zeta(-3+k), & P_2(-2) &= 2^{-2} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-2}{k}_{\Gamma} \zeta(-4+k)
 \end{aligned}$$

となる. どの右辺にも, 必ず $\zeta(1) = \pm\infty$ の項が含まれる. 特に, s が非整数の場合の $P_2(s)$ は確定できない. しかし, 図3をみると, $P_2(0), P_2(-1), P_2(-2)$ の近傍と, $P_2(0.5), P_2(-0.5), P_2(-1.5)$ の近傍は様子が異なることがわかる. 以下は考察である.

(1) $P_2(0.5), P_2(-0.5), P_2(-1.5)$ の近傍について

これらの近傍では, $+\infty, -\infty$ に発散している. この理由は, $\zeta(1) = \pm\infty$ が影響しているからと推測される. そして, もし, $P_2(s)$ が有理型関数であるならば, $s = 0.5, -0.5, -1.5, \dots$ は極となっていると考えられる. つまり, $P_2(s)$ は無限個の極をもつのではないかと考えられる.

(2) $P_2(0), P_2(-1), P_2(-2)$ の近傍について

これらの近傍では, 理解できない現象が起こっている. それは, $P_2(0), P_2(-1), P_2(-2)$ の近傍は, 限りなく 0 に近い値をとるのに, $P_2(0), P_2(-1), P_2(-2)$ 自身の値は 0 ではない. すなわち, $P_2(0), P_2(-1), P_2(-2)$ らは特異点になっていると考えられる. 例えば, $P_2(-2)$ と $P_2(-2.1)$ の計算式を見ると,

$$P_2(-2) = \frac{1}{4} \{ \zeta(-4) + 2\zeta(-3) + \zeta(-2) \} = \frac{1}{240} = 0.0042$$

$$P_2(-2.1) = \frac{1}{2^{2.1}} \left\{ \binom{2.1}{0} \zeta(-4.2) + \binom{2.1}{1} \zeta(-3.2) + \binom{2.1}{2} \zeta(-2.2) + \binom{2.1}{3} \zeta(-1.2) + \dots \right\} \sim 0.000686$$

である。ところで、 $P_2(-2.1)$ の展開式の4項目以降を無視すると、

$$P_2(-2.1) = \frac{1}{2^{2.1}} \left\{ \binom{2.1}{0} \zeta(-4.2) + \binom{2.1}{1} \zeta(-3.2) + \binom{2.1}{2} \zeta(-2.2) \right\} \sim 0.004621$$

となり、 $P_2(-2)$ と $P_2(-2.1)$ の差に違和感がなくなり、 $P_2(-2)$ は特異点ではなくなるような気がする。

このように、 $P_2(0)$, $P_2(-1)$, $P_2(-2)$ らは、本当に特異点となっているかどうか課題として残る。

8. 2列目パスカルゼータ関数 $P_2(s)$ の積分表示

リーマンゼータ関数の積分表示は、

$$\zeta(s) = \frac{1}{\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma(s)} \int_0^\infty \psi(x) x^{s-1} dx$$

であることは良く知られている。ここで、 $\psi(x) = \sum_{i=1}^\infty e^{-n^2 \pi x}$ であり、プサイ関数と呼ばれている。

主結果 5.

$$P_2(s) = \frac{1}{2\Gamma(s)} \int_0^\infty \left(\sqrt[8]{e^x} \theta_2 \left(0, e^{-\frac{x}{2}} \right) \right) x^{s-1} dx \quad (\operatorname{Re}(s) > 1)$$

ここで、 $\theta_2(0, q) = \sum_{n=-\infty}^\infty q^{\left(\frac{zn+1}{2}\right)^2}$ で、ヤコビの楕円テータ関数と呼ばれるものである。

証明. ガンマ関数の定義から

$$\int_0^\infty e^{-nx} x^{s-1} = \Gamma(s) \frac{1}{n^s}$$

であり、 $n_T = \frac{n(n+1)}{2}$ とおくと、

$$\int_0^\infty e^{-n_T x} x^{s-1} = \Gamma(s) \frac{1}{(n_T)^s}$$

となる。 $\sum_{n=1}^\infty$ を両辺に作用させると、

$$\int_0^\infty \left(\sum_{n=1}^\infty e^{-n_T x} \right) x^{s-1} = \Gamma(s) \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(n_T)^s} = \Gamma(s) P_2(s)$$

を得る。ところで、

$$\sum_{n=1}^\infty e^{-n_T x} = \frac{1}{2} \sqrt[8]{e^x} \theta_2(0, \sqrt{e^{-x}})$$

であるので、

$$P_2(s) \Gamma(s) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left(\sqrt[8]{e^x} \theta_2 \left(0, e^{-\frac{x}{2}} \right) \right) x^{s-1} dx$$

が得られる。(証明終)

9. 今後の研究計画

調べた限りパスカルゼータ関数というものはまだ研究されていなかった。本研究では、数学の知識が非常に不足していることはわかっていたが、それでも挑戦してみた。いくつかの論文を比較しながら、多くのことを仮定しつつ、やれる範囲で研究を進めてきた。しかし、これから行わなければならない課題が多く残された。今後の研究のために、以下に特に重要な課題について列挙する。

- (1) $P_n(s)$ の積分表示を見つけ、解析接続の問題に取り組むこと。
- (2) 式(5.1)に潜んだ問題、つまり係数付きゼータ関数の総和の収束性の問題に取り組むこと。
- (3) $P_2(s)$ のグラフにおいて、負の整数 s における点 $(s, P_2(s))$ は、特異点となるかどうかという問題に取り組むこと。
- (4) $s \geq 1$ も含めて、一般的な $P_n(s)$ のグラフの研究を進めること。
- (5) $P_n(-1) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \zeta(-k)$ の逆変換が存在するかという研究を行うこと。

謝辞

今年の8月に岐阜で代数学小研究会が行われた際、元学習院大学教授の飯高茂先生及びその関係の数学研究者の方々から色々なアドバイスをいただいた。また、9月には高知大学での高専数学教育シンポジウムにおいて、高知大学教授の福間慶明先生および数学教育研究者の方々からも貴重なアドバイスをいただいた。ここに感謝の意を記す。

参考文献

[N] L Navas, Analytic continuation of the Fibonacci Dirichlet series, Fibonacci Q. 39, 409-418 (2001)

[S] H. M. Srivastava, Sum of certain series of the Riemann Zeta function, Journal of mathematical analysis and applications 134, 129-140(1988)

[H] ハロルド・M・エドワーズ, ゼータ関数とリーマン予想, 講談社(2012)

[G] Gamma Function, wikipedia https://en.wikipedia.org/wiki/Gamma_function

[K] 黒川信重, 数学の夢 素数からのひろがり, 岩波書店(1998)

[U] D. ウエルズ, 数の辞典, 東京図書(1987)