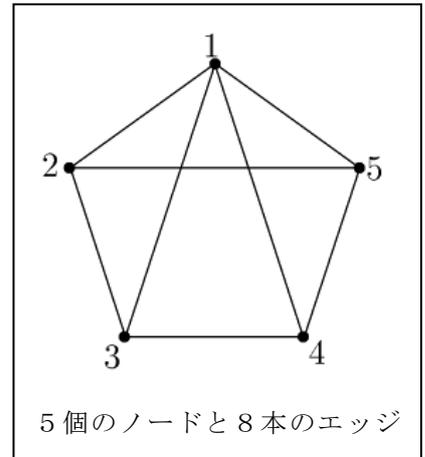


群の作用で不変なグラフの閉曲面への埋め込みの研究

津山工業高等専門学校 総合理工学科 3年
圓山 夏生

1.はじめに

津山高専の数学クラブでは、毎年、オープンキャンパスや秋の文化祭等で、ゾムツールという組立玩具を使って、3次元空間の正多面体や4次元空間の正多胞体の投影模型を製作し、展示している。ウィキペディアでは、「ゾムはノードと呼ばれる直径約 18mm のABS 樹脂製のボールに、数種類のサイズ・形状をもったストラット（ABS 樹脂製の棒）を突き刺して立体物（いわゆるワイヤー・フレーム）を構築する」と説明されている。



ある時、私は、ゾムツールで作った物体を、幾何学図形であるグラフのように感じた。グラフとは、「ノード（頂点）とエッジ（辺）の集合で構成されたもの」である。

グラフ理論についていろいろと調べてみるうちに、

「与えられたグラフを閉曲面に埋め込むとき、その最小種数 g を求めよ」

という問題に興味を持った ([1]参照)。なぜならば、ゾムツールで作った3次元空間の正多面体や4次元空間の正多胞体が、グラフをそのような曲面や胞体に埋め込んでいるように思えたからである。また、現実問題として電子回路への応用もあることも知った ([1]参照)。

上に述べた問題にある閉曲面とは、球や一人乗りの浮き輪や二人乗りの浮き輪、一般に n 人乗りの浮き輪というものを指し、その浮き輪にある穴の数を、種数 (genus) と呼び、 g という記号で表す。そして、閉曲面は g で分類できるという定理が知られている。



$g = 0$



$g = 1$

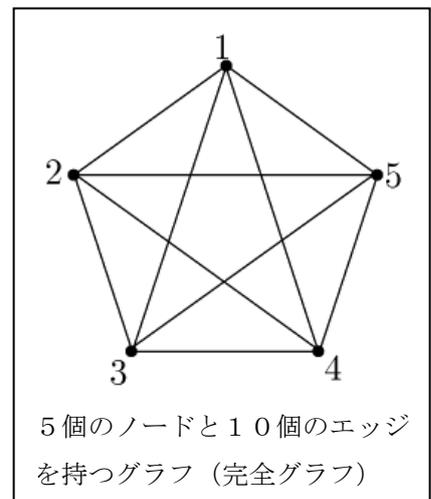


$g = 2$

グラフの中には、完全グラフと呼ばれる特別なものがある。それは、「任意の2個のノードの間に必ずエッジがあるグラフ」を指す。そして、 n 個のノードを持つ完全グラフを K_n で表す。このとき、総エッジ数は、 $n(n-1)/2$ である。さらに、『完全グラフ K_n は、

$$g = \left\lceil \frac{(n-3)(n-4)}{12} \right\rceil$$

である閉曲面に埋め込まれる』ということが知られている ([2]参照)。ここで、記号 $\lceil x \rceil$ は、 x の切り上げを表す。しかし、完全グラフでないグラフについては埋め込み公式はわかっていない。私は、完全グラフ K_n の部分グラフで対称性をもったものに



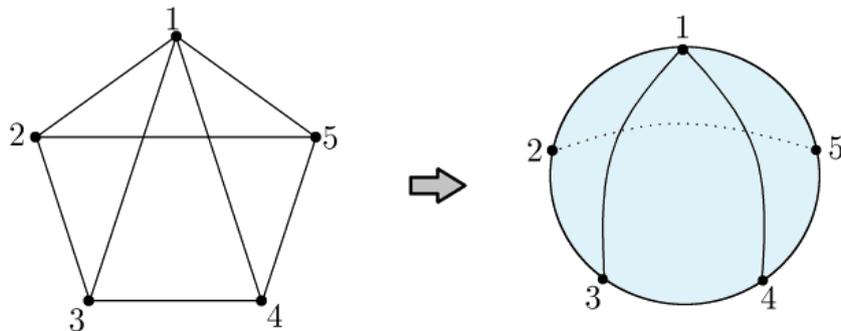
については、規則正しく埋め込むことができる曲面が存在するのではないかと考えた。つまり、どのような対称性を持つグラフがどのような曲面に埋め込まれるかという視点から、グラフに関する研究を行うことにし、その結果、第6節の定理1と第7節の定理2を証明することができた。

2. グラフの閉曲面への埋め込み問題

ここでは、私が行った研究の切掛けとなった「グラフの閉曲面への埋め込み問題」について説明する。まず、その問題を正確に述べる。

問題：グラフをある閉曲面上に、どの2つのエッジも交わらないように描くとき、その閉曲面の最低種数 g を求めよ。

例えば、5個のノードで8本のエッジをもつ下のグラフは $g = 0$ の閉曲面（球）に埋め込まれる。

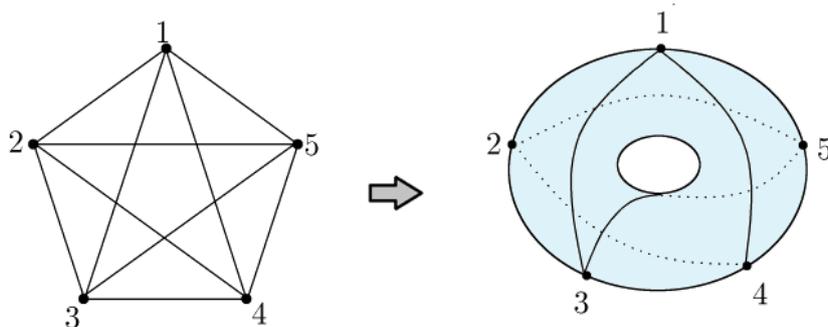


その埋め込み方を説明する。まず、球面を用意し、その表面上に5個の点を打つ。次に、エッジ $1-2, 2-3, 3-4, 4-5, 5-1$ を輪郭部に描く。さらに、エッジ $1-3, 1-4$ を正面に描く。そしてエッジ $3-5$ を背面に描くことで（図では点線で表している）、このグラフは $g = 0$ の閉曲面（球）に、どのエッジも交わらないように描くことができる。

完全グラフ K_5 については、最低種数を求める公式より、 $n = 5$ であるので、

$$g = \left\lceil \frac{(5-3)(5-4)}{12} \right\rceil = 1$$

の閉曲面に埋め込まれる。すなわち、 K_5 は $g = 1$ の閉曲面（一人乗りの浮き輪）に、どのエッジも交わらないように描くことができる。

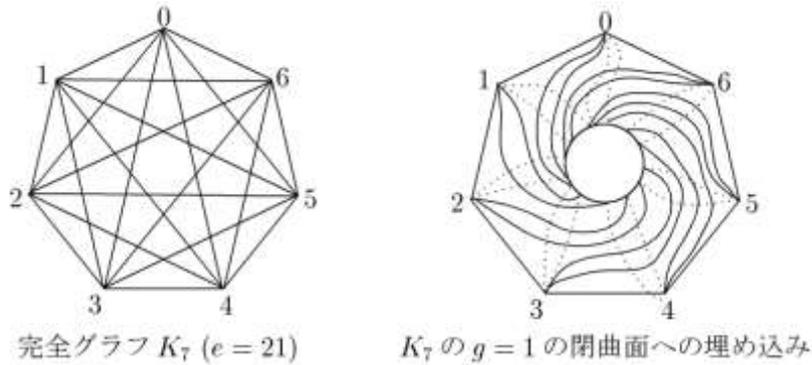


その埋め込み方を説明する。まず、 $g = 1$ の閉曲面（一人乗りの浮き輪）を用意し、その表面上に5個の点を打つ。次に、エッジ $1-2, 2-3, 3-4, 4-5, 5-1$ を一番外側の輪郭部に描く。さらにエッジ $1-3, 1-4$ を正面に描く。そしてエッジ $2-4, 2-5$ を背面に描く（点線）。最後に、エッジ $3-5$ を描くのであるが、それは3から中心の穴まで正面に描き、その後は背面に5まで描く（点線）。そうすることで、 $g = 1$ の閉曲面（一人乗りの浮き輪）に、どのエッジも交わらないように描くことができる。

3. 完全グラフ K_7 と K_9 の閉曲面への埋め込み

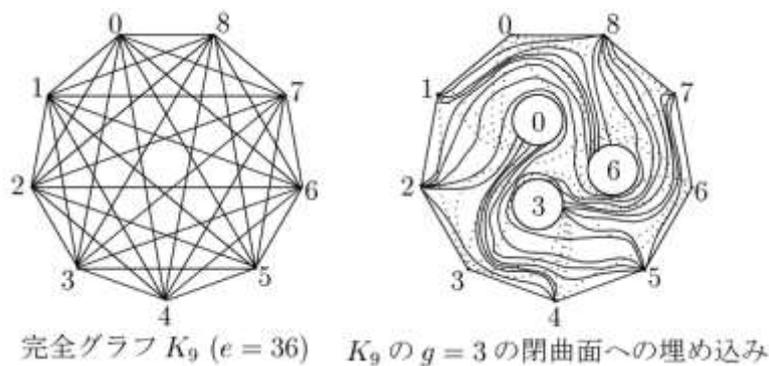
今回の研究で、私が興味をもった完全グラフ K_n の埋め込みを紹介する。一般に、完全グラフ K_n は $g = [(n-3)(n-4)/12]$ の閉曲面に埋め込まれることが分かっているが、その埋め込み方はただ一通りに決まっているわけではなく、いろいろな埋め込み方が存在する。しかし、私は対称的な埋め込み方に興味を持ち、それが、今回の研究に繋がった。

完全グラフ K_7 の埋め込みについて説明する。これは最低種数公式から $g = 1$ の閉曲面に埋め込まれる。私が注目した埋め込みは、以下の図である。



完全グラフ K_7 は、それ自身で対称性を持っている。それは、 $1/7$ 回転対称と、7つの鏡映である。そして上に描いた $g = 1$ の閉曲面への埋め込みは、穴に巻きつく形で $1/7$ 回転対称性を持っている。

完全グラフ K_9 の埋め込みについて説明する。これは最低種数公式から $g = 3$ の閉曲面に埋め込まれる。やはり、私が注目した埋め込みは、以下の図である。



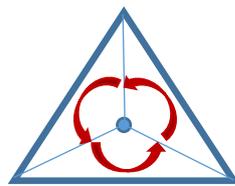
完全グラフ K_9 の対称性は、 $1/9$ 回転対称と、9つの鏡映である。そして上に描いた $g = 3$ の閉曲面への埋め込みも、穴に巻きつく形で $1/9$ 回転対称性を持っている。

私は、完全グラフでないものは、最低種数 g を求める公式がないのだが、しかし、ある特定の条件の下では、公式が作れるのではないかと考えた。すなわち、穴に巻きつくようにエッジを埋め込むという完全グラフの埋め込みをヒントにして対称的なグラフを考えれば、何らかの結果が得られるのではないかと考えた。

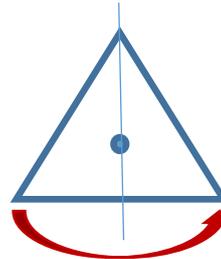
4. 群の作用とグラフのタイプ

完全グラフ K_n は、 $1/n$ 回転対称と、 n 個の鏡映軸をもつ。このことは現代の数学では、二面体群や巡回群という概念を用いて表現される。

二面体群 D_n ：例えば、正三角形は、 $1/3$ 回転対称性、頂点と重心を通る直線に関する対称性（鏡映）をもつ。作用とは、 $1/3$ 回転や鏡映のことを指し、作用全体を正三角形の二面体群 D_3 という。一般に、正 n 角形に作用する $1/n$ 回転や鏡映の作用全体を、正 n 角形の二面体群 D_n という。



$\frac{1}{3}$ 回転

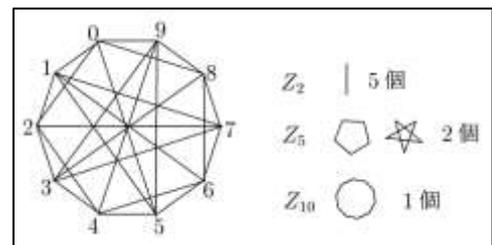


鏡映

巡回群 Z_n ：二面体群 D_n の中の鏡映を除いた $1/n$ 回転だけの作用全体のことを指す。

さて、グラフが与えられたとき、そのグラフが、 D_n 不変であるとは、 $1/n$ 回転や n 個の鏡映の作用で変化しないグラフを指す。同様に、 Z_n 不変であるとは、そのグラフが $1/n$ 回転の作用で変化しないグラフを指す。

右に示すグラフは、10個のノードと25本のエッジを持つグラフで、 D_{10} 不変なものである。対称性を示す要素を取り出すと、 Z_{10} 不変である正10角形が1個、 Z_5 不変である正5角形が1個（0-2-4-6-8-9）、 Z_5 不変である星型正5角形が1個（1-5-9-3-7）、残りは、 Z_2 不変である直線が5個（0-3, 1-6, 2-7, 3-8, 4-9）となっている。このグラフを本研究では、



$$G_{10}[5Z_2 \oplus 2Z_5 \oplus Z_{10}; 25] (D_5\text{不変})$$

と表すことにし、グラフ G_{10} のタイプと呼ぶことにした。一般に、 p を素数、 q をある正の整数としたとき、

$$G_{qp}[i_2Z_2 \oplus i_pZ_p \oplus i_{qp}Z_{qp}; e] \quad (D_p \text{不変})$$

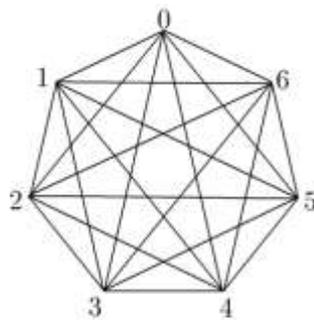
と書いたら、これは、 qp 個ノードと e 個のエッジをもつグラフで、その要素は、 Z_2 不変な直線が i_2 個、 Z_p 不変な正 p 角形が i_p 個、 Z_{qp} 不変な正 qp 角形が i_{qp} 個で構成されていることを表す。そして、これをグラフ G_{qp} のタイプと呼ぶ。

5. 完全グラフの閉曲面への Z_n 不変な埋め込み

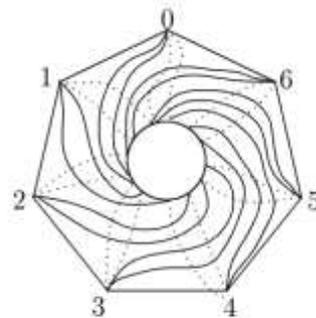
完全グラフ K_7 のタイプは、

$$G_7[3Z_7; 21] \quad (D_7 \text{不変})$$

とできる。そして、「これは $g = 1$ の閉曲面へ Z_7 不変に埋め込むことができる」といえる。



完全グラフ K_7 ($e = 21$)

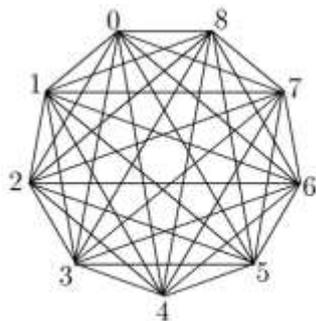


K_7 の $g = 1$ の閉曲面への埋め込み

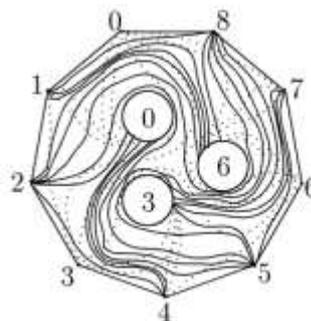
完全グラフ K_9 のタイプは、

$$G_9[4Z_9; 36] \quad (D_9 \text{不変})$$

とでき、「これは $g = 3$ の閉曲面へ Z_9 不変に埋め込むことができる」といえる。



完全グラフ K_9 ($e = 36$)



K_9 の $g = 3$ の閉曲面への埋め込み

一般に、完全グラフ K_n のタイプは、 $G_n\left[\frac{n-1}{2}Z_n; \frac{n(n-1)}{2}\right] \quad (D_n \text{不変})$ とできる。そして、次の予想を立てている。

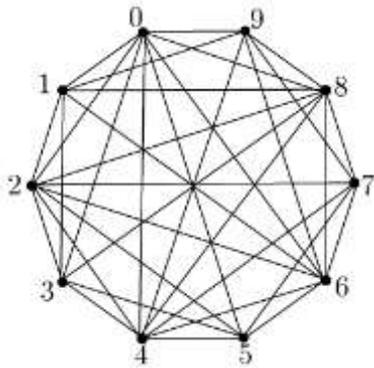
予想 1. 完全グラフ K_n は, n が g の約数であるとき, 種数 g の閉曲面へ Z_n 不変に埋め込むことができる.

6. Z_p 不変な G_{2p} の $g = p$ の閉曲面への埋め込み

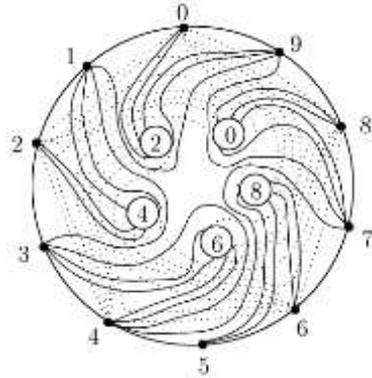
完全グラフではない場合は, 巡回群 Z_p 不変なグラフについて研究を行った.

まず, グラフ $G_{2 \times 5}$ のタイプが $G_{10}[10Z_2 \oplus 4Z_5 \oplus Z_{10}; 40]$ (Z_5 不変) であるものと, グラフ $G_{2 \times 7}$ のタイプが $G_{14}[14Z_2 \oplus 4Z_7 \oplus Z_{14}; 56]$ (Z_7 不変) であるものについて, これらをそれぞれどのような閉曲面に埋め込むことができるかを研究した. 具体的には, 一般に Z_{2p} は明らかに巡回群 Z_p という部分群を持つことから, 種数 $g = p$ の閉曲面へ Z_p 不変に埋め込みの可能性について研究した.

以下では, タイプが $G_{10}[10Z_2 \oplus 4Z_5 \oplus Z_{10}; 40]$ (Z_5 不変) であるグラフ $G_{2 \times 5}$ の種数 $g = 5$ の閉曲面への Z_5 不変な埋め込みについて説明する.



$G_{10}[10Z_2 \oplus 4Z_5 \oplus Z_{10}; 40]$ (Z_5 不変)



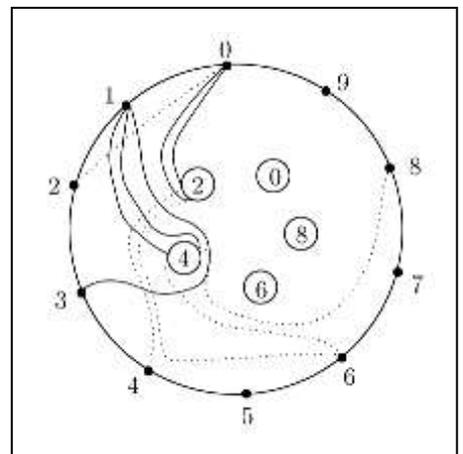
$g = 5$ の閉曲面への埋め込み (Z_5 不変)

G_{10} を構成する部分グラフは, Z_{10} ($0-1-2-\dots-9$), Z_5 ($0-2-4-6-8$), Z_5 ($0-4-8-2-6$), Z_5 ($0-6-2-8-4$), Z_5 ($1-3-5-7-9$) と 5 本のエッジ Z_2 ($1-6, 3-8, 5-0, 7-2, 9-4$) と 5 本のエッジ Z_2 ($1-8, 3-0, 5-2, 7-4, 9-6$) である.

[1] 外側に 0 から 9 までの番号を反時計回りに順序よく振った円を準備し, 偶数番号の点付近に穴を作り, $g = 5$ の閉曲面と考える. そしてこれで, まず G_{10} の部分グラフである Z_{10} ($0-1-2-\dots-9$) が埋め込まれたことになる.

[2] エッジ $0-2$ を点線で最短に結ぶ. ここで, 点線は閉曲面の背面に埋め込まれることを意味する. そして閉曲面を $1/5$ 回転して埋め込まれたエッジ $0-2$ を閉曲面上にコピーし, これを 5 回繰り返すことで, G_{10} の部分グラフである Z_5 ($0-2-4-6-8$) が埋め込まれる.

[3] エッジ $0-4$ の埋め込みを, ノード 0 と 4 の間にある穴 ② を経



由して、0から穴②まで実線で、穴②から4まで点線で円の中心側ではない領域で結ぶ。そして閉曲面を $2/5$ 回転してこれをコピーし、これを5回繰り返すことで、 G_{10} の部分グラフである2つ目の Z_5 (0-4-8-2-6) が埋め込まれる。

[4] エッジ0-6の埋め込みを、ノード0と6の間にある穴②を経由して、0から穴②まで実線で、穴②から6まで点線で円の中心側ではない領域で結ぶ。そして閉曲面を $1/5$ 回転してこれをコピーし、これを5回繰り返すことで、 G_{10} の部分グラフである3つ目の Z_5 (0-6-2-8-4) が埋め込まれる。

[5] エッジ1-3を穴②と穴④の間と穴④と穴⑥の間を通しながら実線で結ぶ。そして閉曲面を $1/5$ 回転してこれをコピーし、これを5回繰り返すことで、 G_{10} の部分グラフである4つ目の Z_5 (1-3-5-7-9) が埋め込まれる。

[6] エッジ1-6の埋め込みを、ノード1と6の間にある穴②を経由して、1から穴②まで実線で、穴②から6まで点線で円の中心側ではない領域で結ぶ。そして閉曲面を $2/5$ 回転してコピーし、これを5回繰り返すことで、 G_{10} の部分グラフである5本エッジ Z_2 (1-6, 3-8, 5-0, 7-2, 9-4) が埋め込まれる。

[7] 最後に、エッジ1-8の埋め込みは、奇数1と穴④を実線で結び、穴④の周りを中心側に回って、穴④と穴⑥の間の背面を抜けてノード8を結ぶことができる。そして閉曲面を $2/5$ 回転してこれをコピーし、これを5回繰り返すことで、 G_{10} の対称軸である5つの Z_2 (1-8, 3-0, 5-2, 7-4, 9-6) が埋め込まれる。

以上により、 $G_{10}[10Z_2 \oplus 4Z_5 \oplus Z_{10}; 40]$ (Z_5 不変) が、 $g = 5$ の閉曲面へ Z_5 不変に埋め込まれる。

$G_{10}[10Z_2 \oplus 4Z_5 \oplus Z_{10}; 40]$ の $g = 5$ の閉曲面への埋め込み方を一般化することで、次の定理を証明できる。以下にその詳細を述べる。

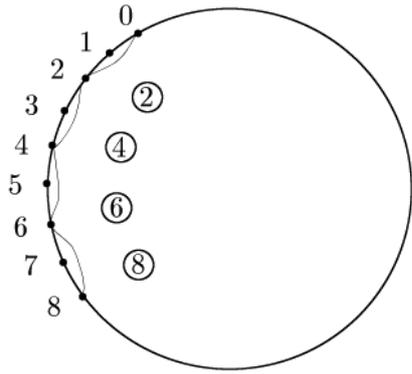
定理 1. p を5以上の素数とする。このとき、 Z_p 不変なグラフ $G_{2p}[2pZ_2 \oplus 4Z_p \oplus Z_{2p}; 8p]$ は、 $g = p$ の閉曲面へ Z_p 不変に埋め込まれる。

ここで、 G_{2p} を構成する部分グラフは、 $Z_{2p}(0-1-\dots-(2p-1))$, $Z_p(0-2-\dots-(2p-2))$, $Z_p(0-4-\dots-(2p-4))$, $Z_p(1-6-\dots-(2p-6))$, $Z_p(1-3-\dots-(2p-1))$, p 本のエッジ $Z_2(1-6, 3-8, \dots, (2p-1)-4)$ と、 p 本エッジ $Z_2(1-8, 3-10, \dots, (2p-5)-2)$ である。

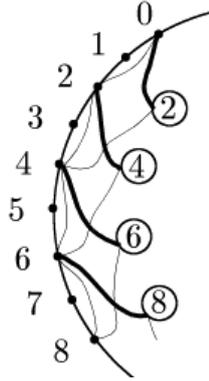
(証明) [Step 1] 外側に0から $2p-1$ までの番号を反時計回りに順序よく振った円を準備し、偶数番号の点付近に穴を作り、 $g = p$ の閉曲面と考える。そしてこれで、まず、 G_{2p} の部分グラフである $Z_p(0-1-\dots-(2p-1))$ が埋め込まれたことになる。

[Step 2] 隣り合う偶数番号を点線で最短に結び、 G_{2p} の部分グラフである $Z_p(0-2-\dots-(2p-2))$ が埋め込まれる。

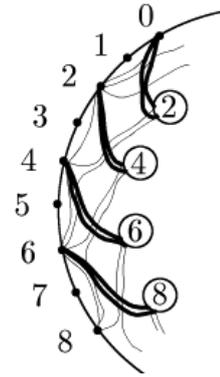
[Step 3] 2つの偶数番号の点 a と点 $a+4$ 同士のエッジについては、点 a と点 $a+4$ の間にある穴($a+2$)を経由して、点 a と穴($a+2$)を実線で、穴($a+2$)と点 $a+2$ を点線で、円の中心側ではない領域で結び、 G_{2p} の部分グラフである2つ目の $Z_p(0-4-8-\dots-(2p-4))$ が埋め込まれる。



[Step 1, 2]



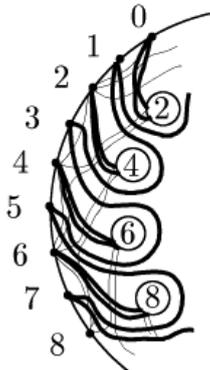
[Step 3]



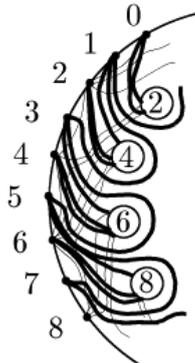
[Step 4]

[Step 4] 点 a と点 $a+6$ 同士のエッジについても同様にして, 点 a と穴(a)を実線で, 穴(a)と点 $a+6$ を点線で, 円の中心側ではない領域で結び, G_{2p} の部分グラフである3つ目の Z_p ($0-6-12-\dots-(2p-6)$) が埋め込まれる.

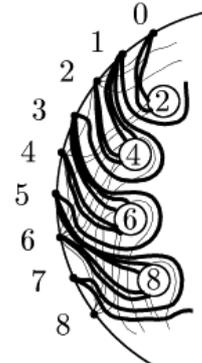
[Step 5] 隣り合う奇数番号の点 $a+1$ と点 $a+3$ 同士を, 穴($a+2$)と穴($a+4$)との間から穴($a+4$)と穴($a+6$)を通過させ, 穴($a+4$)の周りを回るようにして実線で結ぶことができ, G_{2p} の部分グラフである4つ目の Z_p ($1-3-5-\dots-(2p-1)$) が埋め込まれる.



[Step 5]



[Step 6]



[Step 7]

[Step 6] 奇数番号の点 $a+1$ と点 $a+6$ を, 点 $a+1$ と穴($a+4$)を実線で, 穴($a+4$)と点 $a+6$ を点線で円の中心側ではない領域で結ぶことができ, G_{2p} の部分グラフである p 本エッジ Z_2 ($1-6, 3-8, \dots, (2p-1)-4$) が埋め込まれる.

[Step 7] 最後に, 奇数番号の点 $a+1$ と点 $a+8$ を, 点 $a+1$ と穴($a+4$)を実線で, 穴($a+4$)と点 $a+8$ を点線で穴($a+4$)の中心側に回り込んで結ぶことができ, p 本のエッジ Z_2 ($1-8, 3-10, \dots, (2p-5)-2$)を埋め込むことができる.

以上により, $G_{2p}[2pZ_2 \oplus 4Z_p \oplus Z_{2p}; 8p]$ (Z_p 不変) が, $g=p$ の閉曲面 $\sim Z_p$ 不変に埋め込まれる.

Q. E. D

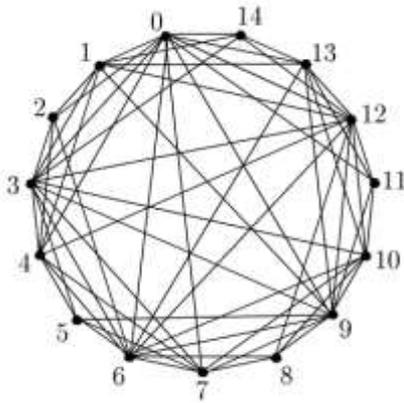
定理1に関連して, 以下の予想を立てている.

予想 2. G_{2p} を $g = p$ の閉曲面に Z_p 不変に埋め込まれる K_{2p} の Z_p 不変な部分グラフとする ($p \geq 5$). このとき, G_{2p} の総エッジ数 e の最大値は $8p$ である.

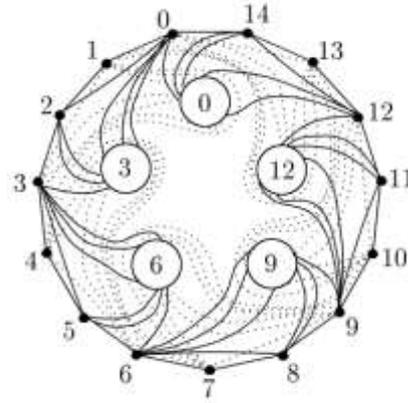
7. Z_p 不変な G_{3p} の $g = p$ の閉曲面への埋め込み

Z_p 不変なグラフ G_{2p} の研究の研究に引き続き, 完全グラフではない Z_p 不変なグラフ G_{3p} について研究した.

以下は, タイプが $G_{15}[15Z_2 \oplus 3Z_5 \oplus 2Z_{15}; 60]$ (Z_5 不変) であるグラフを, $g = 5$ の閉曲面へ Z_5 不変に埋め込んだ図である.



$G_{15}[15Z_2 \oplus 3Z_5 \oplus 2Z_{15}; 60]$ (Z_5 不変)



$g = 5$ の閉曲面への埋め込み (Z_5 不変)

G_{15} を構成する部分グラフは, $Z_{15} (0-1-2-\dots-14)$, $Z_{15} (0-2-4-\dots-1-3-\dots-13)$, $Z_5 (0-3-6-9-12)$, $Z_5 (0-6-12-3-9)$, $Z_5 (1-4-7-10-13)$ と 5 本のエッジ $Z_2 (0-4, 3-7, 6-10, 9-13, 12-1)$ と 5 本のエッジ $Z_2 (0-7, 3-10, 6-13, 9-1, 12-4)$ と 5 本のエッジ $Z_2 (2-6, 5-9, 8-12, 11-0, 14-3)$ である.

$g = 5$ の閉曲面への埋め込み (Z_5 不変) を簡単に述べる. [1] $Z_{15} (0-1-2-\dots-14)$ は一番外側の輪郭に埋め込む. [2] $Z_{15} (0-2-4-\dots-1-3-\dots-13)$ は $0-2$ を実線で直接繋ぎ, $2-4$ は 2 から穴③までを実線で繋ぎ穴③から 4 まで点線で繋ぎ, さらに 4 と 6 を点線で繋ぐ. この $2-4-6$ の繋ぎ方を繰り返していく. [3] $Z_5 (0-3-6-9-12)$ は, 0 から穴①までを実線で繋ぎ穴①から 3 まで点線で繋ぐ, 同様に 3 から穴③までを実線で繋ぎ穴③から 6 まで点線で繋ぐ, これを繰り返す. [4] $Z_5 (0-6-12-3-9)$ は, 0 から穴③までを実線で繋ぎ穴③から 6 まで点線で繋ぐ, 同様に 6 から穴⑥までを実線で繋ぎ穴⑥から 12 まで点線で繋ぐ, これを繰り返す. [5] $Z_5 (1-4-7-10-13)$ は 1 から 4 まで点線で繋ぐ, 同様に 4 から 7 まで点線で繋ぐ, これを繰り返す. [6] 5 本のエッジ $Z_2 (0-4, 3-7, 6-10, 9-13, 12-1)$ については, $Z_2 (0-4)$ ならば, 0 から穴③までを実線で繋ぎ穴③から 4 まで点線で繋ぐ, 他のエッジも同様にする. [7] 5 本のエッジ $Z_2 (0-7, 3-10, 6-13, 9-1, 12-4)$ については, $Z_2 (0-7)$ ならば, 0 から穴③までを実線で繋ぎ穴③から 7 まで点線で繋ぐ, 他のエッジも同様にする. [8] 最後に, 5 本のエッジ $Z_2 (2-6, 5-9, 8-$

12, 11 - 0, 14 - 3)については, Z_2 (2 - 6)ならば, 2から穴③までを実線で繋ぎ穴③から6まで点線で繋ぐ, 他のエッジも同様にする.

以上により, $G_{15}[15Z_2 \oplus 3Z_5 \oplus 2Z_{15}; 60]$ (Z_5 不変) が, $g = 5$ の閉曲面へ Z_5 不変に埋め込まれる.

$G_{15}[15Z_2 \oplus 3Z_5 \oplus 2Z_{15}; 60]$ の $g = 5$ の閉曲面への埋め込みを一般化して, 次の定理が証明することができた.

定理 2. p を5以上の素数とする. このとき, Z_p 不変なグラフ $G_{3p}[3pZ_2 \oplus 3Z_p \oplus 2Z_{2p}; 12p]$ は, $g = p$ の閉曲面へ Z_p 不変に埋め込まれる.

ここで, G_{3p} を構成する部分グラフは, $Z_{2p}(0 - 2 - \dots - (3p - 1))$, $Z_{2p}(0 - 2 - \dots - (3p - 1))$, $Z_p(0 - 3 - \dots - (3p - 3))$, $Z_p(1 - 4 - \dots - (3p - 2))$, $Z_p(0 - 6 - \dots - (3p - 6))$, p 本のエッジ $Z_2(0 - 4, 3 - 7, \dots, (3p - 3) - 1)$ と, p 本エッジ $Z_2(0 - 7, 3 - 10, \dots, (3p - 3) - 4)$ と, p 本エッジ $Z_2(2 - 6, 5 - 9, \dots, (3p - 1) - 3)$ である.

定理 2に関連して, 以下の予想も立てている.

予想 3. G_{3p} を $g = p$ の閉曲面に Z_p 不変に埋め込まれる K_{2p} の Z_p 不変な部分グラフとする ($p \geq 5$). このとき, G_{3p} の総エッジ数 e の最大値は $12p$ である.

8. 今後の研究方針

- (1) G_{2p} と G_{3p} の $g = p$ の閉曲面への埋め込みを利用して, 中心に穴を1つ増やした場合のグラフの研究をすること.
- (2) G_{5p} や G_{7p} などの $g = p$ の閉曲面への埋め込みを研究すること.
- (3) 予想 1, 予想 2, 予想 3を証明すること.
- (4) 四色問題の閉曲面版である閉曲面上の色分け問題への応用にも着手したい.

参考文献

- [1] 野口健太, 平面グラフ・曲面上のグラフ, オペレーションズ・リサーチ学会, 2016年, 12月号, pp. 832-836
- [2] 小館崇子, グラフの曲面への埋め込みについて, 東京女子大学紀要論集. 科学部門報告 / 東京女子大学学会 編, 第 62 巻, pp. 1931-1942, 2011年