

2次曲線で作られる凹型ルーロー三角形の掛谷問題

津山工業高等専門学校 総合理工学科 3年
加田 紘大

1. はじめに

よく知られているルーローの三角形は、正三角形の各頂点を中心に、半径がその正三角形の一辺となる円弧を結んでできたものである(図1). 本研究では、正三角形の各頂点を焦点とする同じ離心率 e の2次曲線を考え($e = 0$ は円, $0 < e < 1$ は楕円, $e = 1$ は放物線, $e > 1$ は双曲線), 正三角形の重心 G の周りに表れる2次曲線を結んで得られる三角形のような図形を扱う. そしてそれを, 2次曲線で作られるルーロー三角形と呼ぶ. また, もしその図形が凹型の図形であれば凹型ルーロー三角形(図2), 凸型の図形であれば, 凸型ルーロー三角形(図3)と呼ぶ.

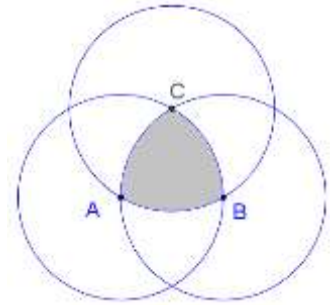


図1 ルーロー三角形

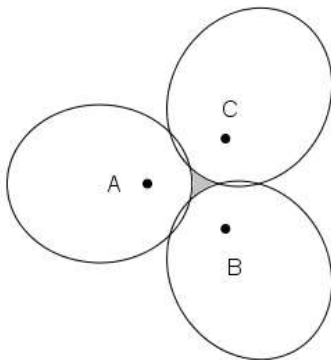


図2 楕円で作られる凹型ルーロー三角形

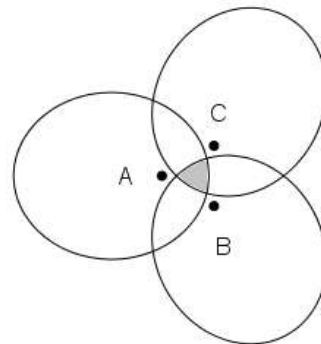


図3 楕円で作られる凸型ルーロー三角形

さて, 本研究における中心的テーマは、『2次曲線で作られるルーロー三角形の各離心率 e に関する掛谷問題を研究すること』である. ここで, 掛谷問題とは以下の問題のことであり, 本研究では, 掛谷問題の答えとなる図形を掛谷図形と呼ぶ.

掛谷問題. 長さ1の線分を一回転させることのできる図形(掛谷集合)はどういったものか, また, そのうちで回転する線分の長さを基準にしたときの最小の面積を持つものは何か.
ここで, 掛谷集合とは, どんな方向においても長さ1の線分がとれるものである.

本研究では, 各離心率 e に対して掛谷問題を考える. その理由は, よく知られた次の命題があるからである.

命題1. C_1 と C_2 は同じ離心率 e の2次曲線とする. このとき, C_1 と C_2 は相似である.

同じ離心率 e の3つの2次曲線から作られるルーロー三角形を $R[e]$ と書く. 掛谷問題は考える図形の面積を求めるとき, その基準を内部で一回転させる直線の長さに行っているため, 一回転させる線分に対する $R[e]$ の面積が最小となるものについて研究していけばよい. 具体的な研究方針は以下である.

(方針1) 離心率 e を固定したとき, 2次曲線で作られるルーロー三角形の掛谷図形はどのような特徴をもつかを調べる.

(方針2) 離心率 e の掛谷図形の面積 $S(e)$ はどのような関数なのか調べる.

以下, 第2節では, 掛谷問題の研究の歴史を簡単に紹介し, 第3節で本研究の意義を示す. そして, 第4節以降で, 円, 楕円, 放物線で作られる凹型ルーロー三角形 $R[e]$ の掛谷図形の特徴について論じる. 特に, 第9節において, 本研究の主結果(予想5)を挙げ, 第10節において, e と $R[e]$ の掛谷図形の面積に関するグラフを示す.

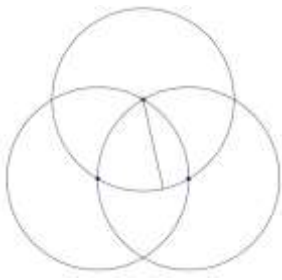
2. 掛谷問題の研究の歴史

掛谷問題は, 1916年11月に東北帝国大学の掛谷宗一博士によって提示された問題である. まず, その歴史の初期(1917年頃)において研究された図形は単連結な凸図形で, 具体的には, 円, ルーロー三角形, 正三角形, そして, 単連結な凹図形であるデルトイドなどであった.

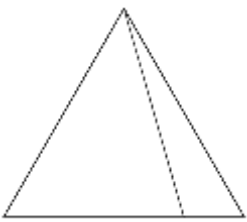


直径1の円の内部では長さ1の線分を1回転できる.

面積: $\frac{\pi}{4} \sim 0.7854$

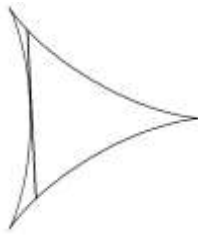


ルーロー三角形でも長さ1の線分を1回転できる. 面積: $\frac{\pi - \sqrt{3}}{2} \sim 0.70478$



高さが1の正三角形の内部で, 長さ1の線分を1回転できる.

面積: $\frac{1}{\sqrt{3}} \sim 0.57735$



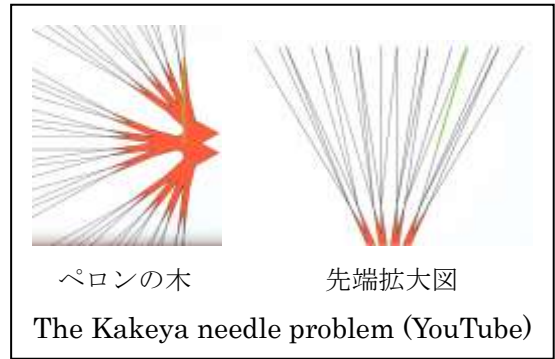
デルトイドの内部でも, 長さ1の線分を1回転できる. 面積: $\frac{\pi}{8} \sim 0.3927$

$$x(t) = \frac{2 \cos t + \cos 2t}{4}$$

$$y(t) = \frac{2 \sin t - \sin 2t}{4}$$

- ・ 1921年 J. Pal により、「正三角形が面積最小の凸図形である」ことが証明された。

- ・ 1928年 A. S. Besicovitch により、「どんな小さな正の数 ε に対しても、面積がそれよりも小さい平面図形で、その中で長さ1の線分を回転させることができるようなものが存在する」(Besicovitch の定理) ことが証明された。簡単にいえば、いくらでも小さな面積をもつ図形が存在するということである。例として、



ペロンの木と呼ばれる図形が知られており、それは、正三角形を細かく切って張り合わせ、図の外側に直線(面積は0)を追加したものである。そして、その直線部を使えば、長さ1の線分をペロンの木の中で一回転させることができる。このことから、正三角形を限りなく細かく切ってペロンの木を作れば、その面積は限りなく0に近づくことが示される。

3. 本研究の意義

掛谷問題の歴史で述べたように、掛谷問題は、これまでの偉大な数学者達により、純粋な数学の意味においては、Besicovitch の定理やペロンの木という大きな結果にまで到達した。

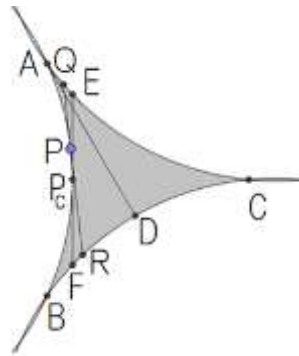
一方、ルーロー三角形は、ロータリーエンジンなどの応用をもち、機構学的な重要性を持っている。さらに、図形の中で線分を一回転させるという掛谷問題自体も、やはり機構学的な意味を感じる。このことから、比較的簡単に得られる2次曲線から作られるルーロー三角形という図形において、その掛谷問題を研究することは、今後何らかの形で重要な応用にも繋がっていくのではないかと考えた。

このような理由から、本研究では、掛谷問題を2次曲線で作られるルーロー三角形という条件に制限し、掛谷図形の研究を行った。

4. 凹型ルーロー三角形の接線の特徴 ($0 \leq e \leq 1$ の場合)

以下、記号 $\{R_\lambda[e]\}$ で、同じ e の2次曲線から作られる凹型ルーロー三角形全体の集合を表すことにする。また、記号 K_e で、 $\{R_\lambda[e]\}$ の中で掛谷問題の答えとなる掛谷図形を表す。そして、第9節の K_e に関する主結果(予想5)に向けて、研究結果を述べていく。まず、この節では、今回の研究で得られた集合 $\{R_\lambda[e]\}$ ($0 \leq e \leq 1$) における掛谷図形 K_e を考えるために必要な接線の特徴について説明する。

離心率 e の凹型ルーロー三角形 $R[e]$ を考え、その頂点を A, B, C とする。さらに、頂点 A から対辺までの距離 AD を h 、の弧 AB の中点 P_c での接線と $R[e]$ との交点を E, F とし、線分 EF の長さを l とする。さらに、弧 AB 上に任意の点 P をとり、 P での接線と $R[e]$ との交点を Q, R とし、接線 QR の長さを $l(P)$ とする。



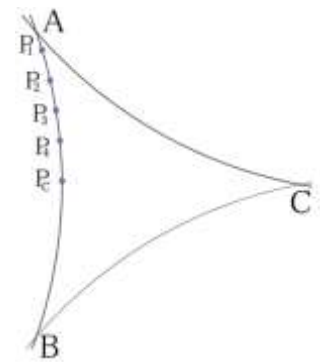
h : 距離AD
 l : EFの長さ
 $l(P)$: 接線QRの長さ
 P_c : 弧ABの中点

以下に列挙する予想は、フリーソフト GeoGebra による数値計算から得られたものである。これらの予想は、凹型ルーロー三角形の基本的な性質を表すものとする。

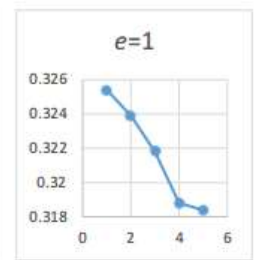
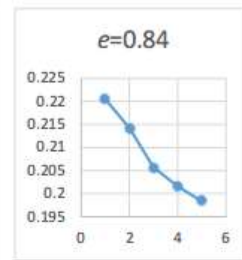
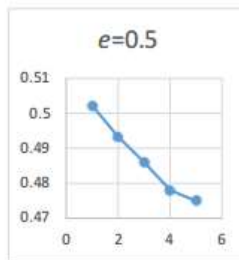
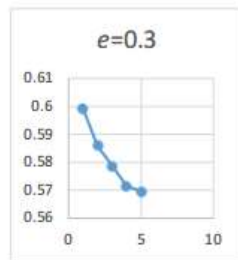
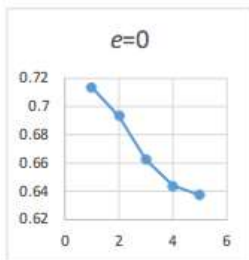
予想 1. 凹型ルーロー三角形 $R[e]$ において $h \geq l(P)$ を仮定する。もし $0 \leq e \leq 1$ ならば、 P が A から P_c まで動くときの接線の長さ $l(P)$ の最小値は l である。

予想 1 の根拠となったデータ例

| e | 0 | 0.3 | 0.5 | 0.84 | 1 |
|--------------|--------|--------|--------|--------|--------|
| h | 0.7242 | 0.5994 | 0.5012 | 0.2270 | 0.3232 |
| $l(P_1)$ | 0.7136 | 0.5991 | 0.5022 | 0.2205 | 0.3254 |
| $l(P_2)$ | 0.6931 | 0.5858 | 0.4933 | 0.2142 | 0.3239 |
| $l(P_3)$ | 0.6622 | 0.5787 | 0.4860 | 0.2057 | 0.3218 |
| $l(P_4)$ | 0.6440 | 0.5715 | 0.4780 | 0.2016 | 0.3188 |
| $l = l(P_c)$ | 0.6373 | 0.5696 | 0.4749 | 0.1984 | 0.3184 |



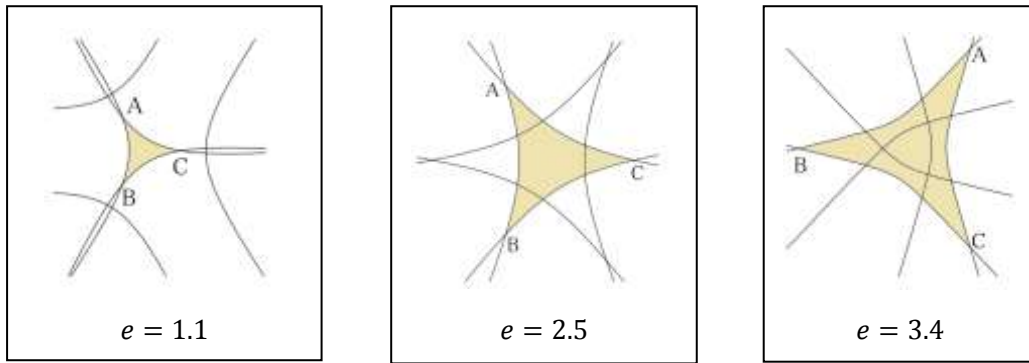
ただし、点 P_j は A から P_c の間の適当な点である。



5. 凹型ルーロー三角形の接線の特徴 ($e > 1$ の場合)

$e > 1$ である凹型ルーロー三角形 $R[e]$ ，すなわち、双曲線で作られる凹型ルーロー三角形 $R[e]$ について説明する。特に、 $e = \infty$ の場合は、凹型ルーロー三角形 $R[e]$ は正三角形となる。したがって、掛谷三角形 K_e の面積は $1/\sqrt{3}$ であることは分かっている。

下の 3 つの図のそれぞれ黄色の図形 ABC が、双曲線で作られる凹型ルーロー三角形 $R[e]$ である。



上の図から分かるように、 e の値が大きくなると、双曲線の頂点の間の距離が近づいていき、 $e = 2.5$ においては、2つの凹型ルーロー三角形が表れる。そして、 $e = 3.4$ 付近の場合から、凹型ルーロー三角形の内側に凸型ルーロー三角形が見られるようになり、以後も、そのような状態となる。また、もう一つ重要なこととして、『 $e > 1$ の凹型ルーロー三角形では、その2つの辺が頂点で接することは決してない』のである。以上のことを注意しながら、数値計算を行った結果、次の予想を得ることができた。

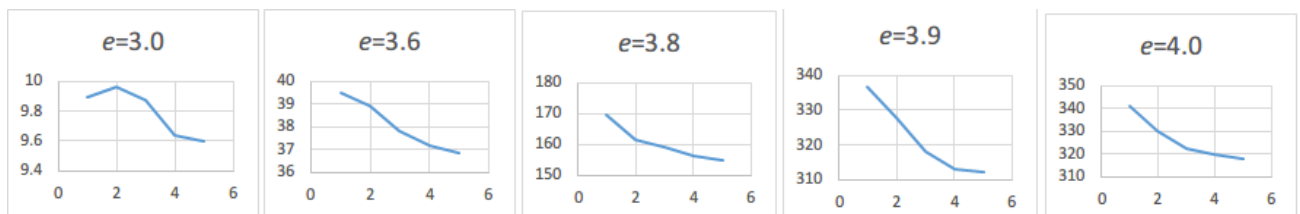
予想2. $e > 1$ である凹型ルーロー三角形 $R[e]$ において、 P が A から P_c まで動くときの接線の長さ $l(P)$ の最小値は l である。特に、ある e_0 が範囲 $3.8 < e_0 < 3.9$ に存在して、 $e > e_0$ ならば、つねに $h < l(P)$ となる。

(注意) 「 $e > e_0$ ならば、つねに $h < l(P)$ 」となる e_0 が存在する理由は、 e が大きくなると、凹型ルーロー三角形は次第に正三角形に近づくからである。

予想2の根拠となったデータ例

| e | 3.0 | 3.6 | 3.8 | 3.9 | 4.0 |
|--------------|--------|---------|---------|--------|--------|
| h | 9.6047 | 36.8565 | 154.857 | 310.07 | 312.98 |
| $l(P_1)$ | 9.8907 | 39.5366 | 169.784 | 336.81 | 341.21 |
| $l(P_2)$ | 9.9662 | 38.8966 | 161.714 | 327.78 | 330.13 |
| $l(P_3)$ | 9.8805 | 37.8337 | 159.174 | 317.91 | 322.56 |
| $l(P_4)$ | 9.6352 | 37.1725 | 156.167 | 313.14 | 319.66 |
| $l = l(P_c)$ | 9.5984 | 36.8563 | 154.856 | 312.18 | 317.99 |

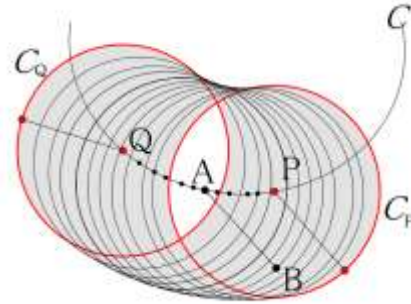
ただし、点 P_j は A から P_c の間の適当な点である（予想1の図参照）。 $e = 3.0, 3.6, 3.8$ の場合は $h > l$ のデータを挙げた。 $e \geq 3.9$ の場合はつねに $h < l(P)$ と予想されるので、そのデータを挙げた。



6. 掛谷図形にならない凹型ルーロー三角形の特徴

次に、凹型ルーロー三角形 $R[e]$ の掛谷図形を考える上で、逆に、どのような場合に、凹型ルーロー三角形 $R[e]$ は掛谷図形にはなり得ないかを研究した。

命題2. 2次曲線 C 上に点 P, Q をとり、長さ1の線分 AB を考える。このとき、線分 AB の端点 A を P から Q まで C 上で移動させるとき、線分 AB の端点 B の動く範囲は、 P, Q の間の C 上の任意の点を中心とした半径1の円周の和領域である。

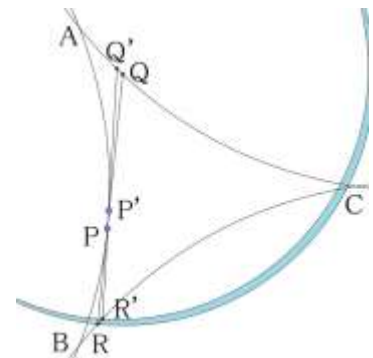


(証明) 端点 B の動く範囲は、 A を中心とした円周上であることからいえる。Q. E. D.

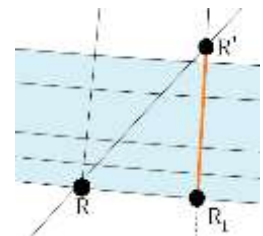
命題3. 凹型ルーロー三角形 $R[e]$ の境界上の点 P における接線を QR 、点 P に限りなく近い点を P' とし、 P' での接線を $Q'R'$ とする。このとき、 $l(P) > l(P')$ ならば、 $R[e]$ の中だけで線分 QR を移動させて、端点 Q を Q' の位置にすることはできない。

(証明) 点 R の移動範囲を考えると、命題3は、線分 QR の端点 Q を $R[e]$ の境界線上を滑らせる場合で示せば十分である。

右図で説明する。まず、線分 QR のコピーを Q_0R_0 とし Q_0R_0 を移動させるものとする。線分 Q_0R_0 の端点 R_0 の移動範囲は、命題2より、 $R[e]$ の境界上で Q と Q' の間の任意の点を中心とした半径 $l(P)$ の円周の和領域 D (青い領域) である。さて、 Q_0 が Q' の位置にあり線分 Q_0R_0 も $R[e]$ の内側にあったとする。このとき、 R_0 が R' の左側にあると線分 Q_0R_0 が弧 AB と交わるために、 R_0 は R' より右側の位置にあることがわかる。したがって、線分 Q_0R_0 をこの位置から $R[e]$ の内側だけを通して元の位置 QR に戻すことはできないことを示せばよい。



そのために、 Q_0 と Q' が一致した直線 Q_0R_0 を、一旦、直線 $Q'R'$ に重ね、線分 Q_0R_0 を R_0 の方向へ延長して D の外側の境界と交わった点を R_1 とする。このとき、明らかに線分 $R'R_1$ は $R[e]$ の外にある。さらに、 $R'R_1$ は D を横切る。なぜならば、 $R[e]$ は凹型であり、 P と P' は限りなく近いので、 $QQ'RR'$ は $QR' < Q'R$ という四角形と考えてよく、 $l(P) > l(P')$ より QQ' の点と RR' の点の2点を結んだ直線の長さの最大値は $l(P) = QR$ であって、これより、直線 $Q'R'$ 上には D の点は存在しないからである。



さて、 Q_0 が Q' の位置にあり、直線 Q_0R_0 も $R[e]$ の内側にあるとき、 R_0 は R' より右側にあるので、 R_0 を元の位置 R に戻すには、 R_0 を左方向へ移動させなければならない。しかし、 R_0 はその途中で、

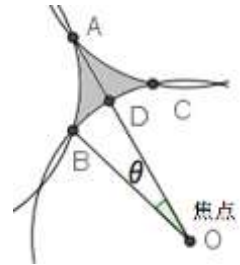
D を横切る線分 $R'R_1$ 上を必ず通過しなくてはならない. これは, R_0 が $R[e]$ の外の点を通過することを意味する. したがって, 端点 Q_0 を $R[e]$ の境界線上を滑らせながら, かつ $R[e]$ の中だけで線分 Q_0R_0 を移動させて, 端点 Q_0 を Q' の位置にすることはできない. よって, 命題は示された. Q. E. D.

命題3をくり返し使うことで, 次の系が得られる.

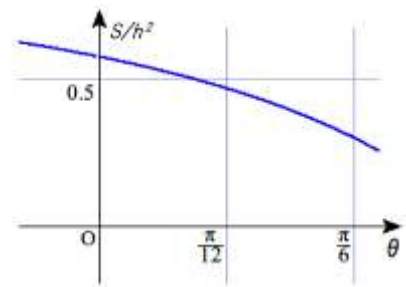
系1. 凹型ルーロー三角形 $R[e]$ においては, $l(P)$ および h の中の最小の長さの線分でしか一回転させることはできない.

7. $h < l(P)$ を満たす $0 \leq e \leq 1$ の凹型ルーロー三角形 $R[e]$ の面積

さて, $0 \leq e \leq 1$ でかつ $h < l(P)$ の場合を考える. この場合, 長さ h の線分を $R[e]$ 内で一回転できることは明らかである. しかし, 命題3より, 長さ $l(P)$ の線分を $R[e]$ 内で一回転させることはできない. したがって, 掛谷問題においては, 長さ h の線分を基準にした面積を考えればよい.



そこで, $R[e]$ を ABC とし, BC の中点を D , さらに2次曲線の焦点 O に対し, 角 BOD を θ とし, さらに θ_m を θ の最大角とする. (注意! $\theta = \theta_m$ のときは $h = l(A)$ のときである.)



$e = 0$ のときを考える. ルーロー三角形を作る円の半径を1とすると,

$$h = \sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta - 1,$$

$$S = \sqrt{3} \sin^2 \theta + 3 \cos \theta \sin \theta - 3\theta$$

となる. したがって, 長さ h の線分を基準にした面積 S/h^2 のグラフは下図となる. この場合, $\theta_m = \pi/6$ である. $e \neq 0$ のとき, h と S の式は複雑過ぎて, S/h^2 のグラフを厳密に扱うことはできなかった. しかし, 数値計算の結果から, S/h^2 は θ に関して単調減少であるという次の予想が得られた.

予想3. $0 \leq e \leq 1$ の凹型ルーロー三角形 $R[e]$ の面積を S とすると, S/h^2 は $0 < \theta < \theta_m$ で単調減少関数である.

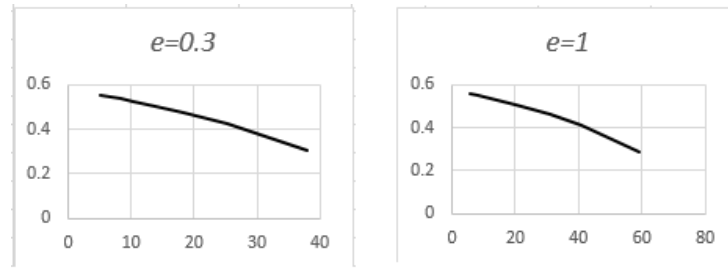
予想3の根拠となったデータ例 (面積の計算はwebサイト Ke!san を用いた[Ke!].)

$e = 0.3$ の場合

| | | | | | | | |
|----------|--------|--------|---------|---------|---------|---------|---------|
| θ | 5.1416 | 8.2392 | 10.2583 | 13.8421 | 18.2381 | 25.2215 | 38.0356 |
| S/h^2 | 0.5531 | 0.5373 | 0.5263 | 0.5057 | 0.4780 | 0.4273 | 0.3058 |

$e = 1$ の場合

| | | | | | | | |
|----------|--------|--------|---------|---------|---------|---------|---------|
| θ | 5.8676 | 8.1406 | 10.2256 | 20.1826 | 30.9633 | 40.9194 | 58.9218 |
| S/h^2 | 0.5573 | 0.5510 | 0.5455 | 0.5100 | 0.4637 | 0.4127 | 0.2864 |



8. $e > 1$ の凹型ルーロー三角形 $R[e]$ の面積

$e > 1$ である凹型ルーロー三角形 $R[e]$ については、第5節で述べたとおり、 $R[e]$ の2つの辺が頂点で接することは決してないため、 $\theta_m = \infty$ となる。したがって、 $R[e]$ の面積 S/h^2 の最小値は $0 \leq e \leq 1$ の場合とは異なる。数値計算の結果から、以下の予想が立てられた。

予想4. $e > 1$ の凹型ルーロー三角形 $R[e]$ においては、ある θ_0 が存在し、 $0 < \theta \leq \theta_0$ のとき、 S/h^2 は単調減少し、 $\theta > \theta_0$ のとき、 S/h^2 は $0 < \theta < \theta_m$ で単調増加する。

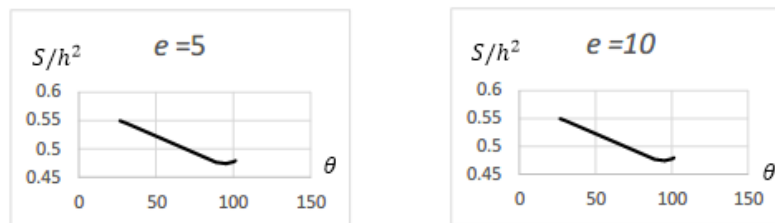
予想4の根拠となったデータ例

$e = 5$ の場合 (つねに $h < l(P)$)

| | | | | | | | |
|----------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| θ | 26.6798 | 31.5327 | 51.4233 | 88.8073 | 95.4090 | 100.212 | 101.309 |
| h | 3.3358 | 4.0195 | 7.5263 | 34.0951 | 70.0000 | 318.815 | 1843.23 |
| S/h^2 | 0.5498 | 0.5444 | 0.5209 | 0.4765 | 0.4744 | 0.4772 | 0.4791 |

$e = 10$ の場合 (つねに $h < l(P)$)

| | | | | | | | |
|----------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| θ | 20.9173 | 32.5903 | 55.1717 | 75.2356 | 88.1673 | 90.0008 | 93.2543 |
| h | 5.8627 | 9.6487 | 20.3983 | 44.8379 | 123.255 | 162.496 | 374.000 |
| S/h^2 | 0.566 | 0.5595 | 0.5465 | 0.5363 | 0.5337 | 0.5340 | 0.5353 |



9. $0 \leq e \leq e_0$ である凹型ルーロー三角形 $R[e]$ の掛谷図形 K_e の特徴

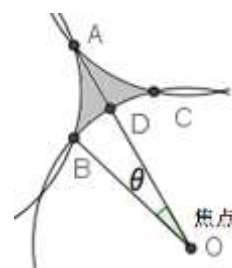
$0 \leq e < e_0$ とする。 θ を大きくすると、 $h = AD$ が大きくなるため、ある θ のとき以降は $h \geq l(P)$ と

いう状況になる。したがって、系1より、掛谷図形を考えるためには、長さ $l(P)$ の線分を $R[e]$ 内で一回転させることを考え、 $S/l(P)^2$ が最小となるような $l(P)$ は何かということを考えればよい。

(1) $0 \leq e \leq 1$ 場合、予想1, 予想2と予想3がどれも正しいなら、 $l(P) = l(P_C) = h$ が最小と考えられる。

(2) $1 < e \leq e_0 < 0.39$ の場合、予想1, 予想2と予想4がどれも正しいなら、 $l(P) = l(P_C) = h$ が最小と考えられる。

以上のことから、 $0 \leq e < e_0$ に関しては $R[e]$ の掛谷図形 K_e の特徴を捉えることができた。

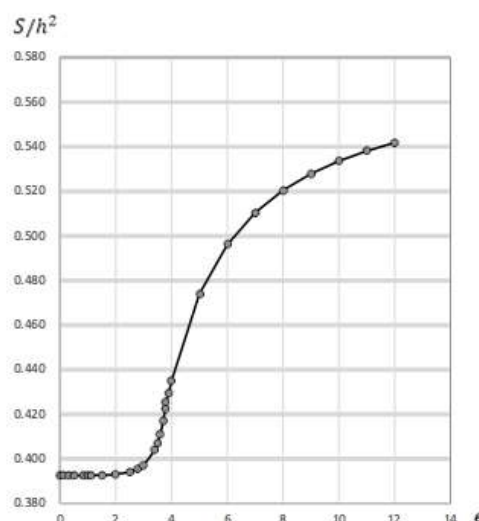


主結果 (予想5) $0 \leq e \leq e_0$ の凹型ルーロー三角形 $R[e]$ の掛谷図形 K_e は、 $h = l(P_C)$ を満たすものである。

10. 掛谷図形 K_e の e と面積 S/h^2 の関係

主結果 (予想5) を元に、掛谷図形の e と S/h^2 の関係式は何かについて研究しようと思った。以下は、そのデータとグラフである。 $0 \leq e \leq 3.8 < e_0$ については、 $h = l(P_C)$ のときの S/h^2 のデータであり、 $e \geq 3.9 > e_0$ については、予想4より、 S/h^2 には最小値が存在すると考えられるので、それに予想近似値を列挙した。 h の値の連続性が e_0 を境に変化しているようにとれる。また、 $e = \infty$ の場合は、凹型ルーロー三角形 $R[e]$ は正三角形であり、その掛谷図形 K_e の面積は $1/\sqrt{3}$ であることは分かっている。すなわち、 e が大きくなるにつれ、高さが1の正三角形の面積で $S = 1/\sqrt{3} \sim 0.57735$ に近づく。

| e | S/h^2 | h | e | S/h^2 | h |
|-----|---------|---------|------|---------|----------|
| 0 | 0.3925 | 0.5928 | 3.6 | 0.4112 | 36.8488 |
| 0.1 | 0.3925 | 0.5872 | 3.7 | 0.4169 | 59.9657 |
| 0.3 | 0.3925 | 0.5418 | 3.77 | 0.4224 | 105.1393 |
| 0.5 | 0.3925 | 0.4500 | 3.8 | 0.4253 | 154.7409 |
| 0.8 | 0.3925 | 0.1807 | 3.9 | 0.4295 | 62.1497 |
| 1 | 0.3925 | 0.3115 | 4 | 0.4351 | 65.2343 |
| 1.1 | 0.3925 | 0.1323 | 5 | 0.4740 | 69.3959 |
| 1.5 | 0.3926 | 0.8357 | 6 | 0.4961 | 75.7719 |
| 2 | 0.3930 | 2.1257 | 7 | 0.5105 | 83.6316 |
| 2.5 | 0.3941 | 4.6462 | 8 | 0.5205 | 95.4220 |
| 2.8 | 0.3955 | 7.0830 | 9 | 0.5279 | 100.3259 |
| 3 | 0.3971 | 9.5513 | 10 | 0.5337 | 123.2668 |
| 3.4 | 0.4039 | 20.2123 | 11 | 0.5381 | 135.1291 |
| 3.5 | 0.4070 | 26.3044 | 12 | 0.5419 | 147.0194 |

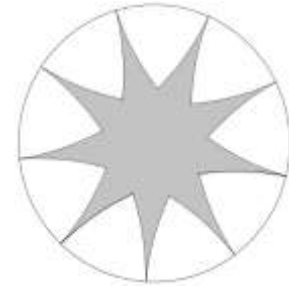


今回、 e と S/h^2 の関係を示すグラフからその関係式を見つけ出すことはできなかったが、以下の予想を立てている。

予想 6. e と S/h^2 の関係を示すグラフの変曲点は e_0 ($3.8 < e_0 < 3.9$) である。

1 1. 今後の研究方針

今後の研究として、掛谷 n 角形の研究が考えられる。これについては、M. Bloom and I. J. Schoenberg の研究結果を参考にしたいと考えている。それは、 n 個の尖点をもつ星型の図形は $n \rightarrow \infty$ のとき $\frac{\pi}{24}(5 - 2\sqrt{2}) < \frac{\pi}{11}$ に近づくことを示した研究である。例として、図形全体が内接している円に直交する星型の図形が上げられた(1965年)。



「円に直交している
9個の尖点をもつ星型の図形」

今回、掛谷三角形 K_e について、多くの数値計算を行った。そしてそれらのデータから、6つの重要な結果(予想)を得ることができた。これらの証明を2次曲線の定義式を用いて試みてみたが、方程式があまりにも複雑になりすぎたため断念した。別のアイデアを考えているところである。また、 e と S/h^2 の関係のグラフがどのような関数で表されるかについても研究したいと考えている。これに平行して、 $e \geq 3.9 > e_0$ に関する掛谷図形の特徴を研究する予定である。

一方、今回は凸型ルーロー三角形については扱わなかったが、同じような結果が得られる可能性が高いため、それらについてもきちんと研究し、凹型ルーロー三角形との関連性もみていく予定である。その研究のために、「凹型ルーロー三角形の掛谷図形と凸型ルーロー三角形の掛谷図形は、ある種の反転という関係を持つだろう」という作業仮説を立てている。

参考文献

- [AR1] 新井仁之, ルベーグ積分と面積0の不思議な図形たち, 日本数学会 数学通信 第7巻第3号, 2002年
- [AR2] 新井仁之, 掛谷問題ショートコース, WEB版 現代数学入門講座 Vol. 1 (2009年8月14日), <http://www.araiweb.matrix.jp/semi208/KekeyaProblem.html>
- [DD] David L. Duncan, Constructions Regarding Integration in the Plane and the Rotation of Segments, University of Washington, Department of Mathematics, 2006. <https://sites.math.washington.edu/~morrow/papers/duncan-thesis.pdf>
- [Ke!] Ke!san 生活や実務に役立つ計算サイト, <https://keisan.casio.jp/exec/system/1343633437>