

Pascal Zeta-Functions について

中野日向 (津山工業高等専門学校 情報工学科 4年)

1. はじめに

整数論に関する本[K]から, リーマンゼータ関数 $\zeta(s) = 1^{-s} + 2^{-s} + 3^{-s} + \dots$ から得られる等式

$$1 + 1 + 1 + \dots = -\frac{1}{2}, \quad 1 + 2 + 3 + \dots = -\frac{1}{12}$$

あるにも関わらず値が与えられるが, この計算は解析接続によって定まるものである.

本研究は, 前年度に行ったパスカルゼータ関数の研究を継続したものである. パスカル三角形は, 0 列目がすべて 1 からなり, 1 列目は自然数が並ぶ. それを

$$P_1(s) = 1^{-s} + 2^{-s} + 3^{-s} + \dots$$

とする. 明らかに $P_1(s)$ はリーマンゼータ関数 $\zeta(s)$ である. 2 列目は三角数が並ぶ. それを

$$P_2(s) = 1^{-s} + 3^{-s} + 6^{-s} + 10^{-s} + 15^{-s} + \dots$$

とする. 3 列目は三角錐数が並び,

$$P_3(s) = 1^{-s} + 4^{-s} + 10^{-s} + 20^{-s} + 35^{-s} + \dots$$

とする. このようにして n 列目のパスカルゼータ関数 $P_n(s)$ を定義する. 以下, パスカル三角形の n 列目から作られるゼータ関数 $P_n(s)$ のことを, n 列目のパスカルゼータ関数と呼ぶことにする.

以下において, 記号 $\binom{a}{b}$ は a と b のコンビネーションを表し, 記号 $\left[\begin{smallmatrix} e \\ f \end{smallmatrix} \right]$ は e と f の第 1 種スターリング数を表す. 昨年度の研究で得られた 2 列目から作られるゼータ関数の公式は,

$$P_2(s) = 2^s \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-s}{k} \zeta(2s+k),$$

である. そして, より一般に $\zeta(s)$ に関する $P_n(s)$ の級数公式

$$P_n(s) = (n!)^s \sum_{k_1, k_2, \dots, k_{n-1}=0}^{\infty} \binom{-s}{k_1} \binom{-s-k_1}{k_2} \dots \binom{-s-k_1-\dots-k_{n-2}}{k_{n-1}} \left[\begin{smallmatrix} n \\ 1 \end{smallmatrix} \right]^{k_1} \left[\begin{smallmatrix} n \\ 2 \end{smallmatrix} \right]^{k_2} \dots \left[\begin{smallmatrix} n \\ n \end{smallmatrix} \right]^{k_{n-1}} \zeta(ns + (n-1)k_1 + \dots + k_{n-1})$$

を導いた. 特に, $P_n(s)$ の公式から,

$$P_n(-1) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] \zeta(-k)$$

1					
1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1
				

図 1 (パスカル三角形)

が得られた。これはフーリエ変換を思わせる式になっている。

今年の研究のテーマは、昨年得られた $\zeta(s)$ に関する $P_n(s)$ の級数公式の検証を行うことであり、特に、 $P_2(s)$ に関する研究を行った。

まず s を負の実数として $P_2(s)$ を Γ 関数を用いて扱った。すなわち、 $\binom{-s}{k} = \frac{(-s)!}{k!(-s-k)!} =$

$\frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(k+1)\Gamma(1-s-k)}$ から、 $P_2(s)$ に関する公式

$$P_2(s) = 2^s \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-s}{k}_{\Gamma} \zeta(2s+k)$$

を導いた。ここで、 $\binom{-s}{k}_{\Gamma} = \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(k+1)\Gamma(1-s-k)}$ とした。

次に、無限和の計算を有限で近似するために Γ 関数の相半公式とスターリングの公式を用いて

$$\binom{n}{k}_{\Gamma} \sim \Gamma(n+1) \left(\frac{e}{k-n-1}\right)^{n+1} \left(\frac{k-n-1}{k}\right)^{k+0.5} \frac{\sin(k-n)\pi}{\pi}$$

なる近似式を導出し、 $P_2(s)$ の具体的な数値計算を行った。その結果、 $P_2(s)$ のグラフは $s = -0.5, -1.5, -2.5, -3.5, \dots$ のところで不連続となっていた。

さらに、 s が負の整数のときの $P_2(s)$ の値を正確に計算すると、 $P_2(s)$ の値が常に有理数 $\frac{1}{a}$ という形として表されるという興味深い現象も突き止めた。

このような不可解な $P_2(s)$ の正体を探るために、リーマンゼータ関数の方法を真似て、 $s > 1$ のときの $P_2(s)$ の積分表示式

$$P_2(s) = \frac{1}{2\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \left(\sqrt[s]{e^x} \theta_2 \left(0, e^{-\frac{x}{2}} \right) \right) x^{s-1} dx \quad (\operatorname{Re}(s) > 1)$$

を導いた。ここで、 $\theta_2(0, q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2}$ で、ヤコビの楕円テータ関数と呼ばれるものである。

この積分表示式が $\operatorname{Re}(s) \leq 1$ の領域まで解析接続されるかどうかは課題となっている。しかし、 $P_2(s)$ のグラフの様子から推測すると、 $P_2(s)$ は Γ 関数の影響を受けて、 $s = -0.5, -1.5, -2.5, -3.5, \dots$ の以外のところで解析接続されるのではないかと考えている。

2. フィボナッチゼータ関数 $F(s)$ について

本研究では、L. Navas[N]の論文で扱われた研究手法を参考にしている。その概要を説明する。まず、 $\{F_n\}$ をフィボナッチ数列として、

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n^{-s}$$

を、フィボナッチゼータ関数と呼ぶ。そして、 $\Phi(x) = \max\{n \geq 0 \mid F_n \leq x\}$ とすると、 $F(s)$ は、

$$F(s) = s \int_0^{\infty} \Phi(x) x^{-s-1} dx \quad \dots \dots \dots (2.1)$$

であることが示された。そして、 $F(s)$ が $\text{Re } s > 0$ で収束することを示した後、複素平面全領域で解析接続できることが示された。さらに、 $F(s)$ は無数個の点で極をもつ有理型関数であることも示された。その後、整数 s に関する $F(s)$ の公式が研究された。 φ を黄金比 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ とし、ビネの公式を使って、

$$F(s) = 5^{s/2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-s}{k} (-1)^{k(n+1)} \varphi^{-n(2+k)} \quad \dots \dots \dots (2.2)$$

と変形する。ここで、重要な点は、 $\sigma = \text{Re } s$ とすると、不等式

$$\sum_{n \geq 1, k \geq 0} \left| \binom{-s}{k} (-1)^{k(n+1)} \varphi^{-n(2+k)} \right| \leq (1 - \varphi)^{-|s|} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi^{-n\sigma} < \infty$$

が成り立つことから、式(2.1)の総和の順序を変更でき、これより、公式

$$F(s) = 5^{s/2} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-s}{k} \frac{1}{\varphi^{s+2k} + (-1)^{k+1}} \quad \dots \dots \dots (2.3)$$

が得られた。以上が、Navas が行った研究で、特に本研究に関係する部分である。

残念ながら、本研究では、 n 列目のパスカルゼータ関数 $P_n(s)$ に対して、フィボナッチゼータ関数 $P_n(s)$ が複素平面全体に解析接続可能なのかわからない。しかし、本研究では、これを仮定して研究を進めた。

3. 2列目のパスカルゼータ関数 $P_2(s)$ について（昨年度の研究）

命題1（予想）. s を負の整数とする。このとき、2列目のパスカルゼータ関数 $P_2(s)$ の値は、

$$P_2(s) = 2^s \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-s}{k} \zeta(2s+k)$$

で与えられる。

$P_2(s)$ が複素平面全体に解析接続可能であることを仮定して、主結果1が、どのようにして得られるのか、について解説する。以下の計算はL Navas [N]の研究手法を参考にした。

パスカル三角形の2列目は3角数の列 a_n であり、それは、 $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$ で与えられる。一方、 a_n^{-s} を $(n+1)^{-s}$ の二項展開に注意して変形すると、

$$a_n^{-s} = \frac{n^{-s}(n+1)^{-s}}{2^{-s}} = 2^s n^{-s} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-s}{k} n^{-s-k} = 2^s \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-s}{k} n^{-2s-k}$$

となる。したがって、2列目のパスカルゼータ関数 $P_2(s)$ は、

$$P_2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-s} = 2^s \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-s}{k} n^{-2s-k}$$

となる。ここで総和の順序の交換を行う。このことが可能であるのかが課題として残っている。しかし、これを信じ、議論を続ける。

総和の順序が交換可能とすると、

$$P_2(s) = 2^s \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-s}{k} n^{-2s-k} = 2^s \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-s}{k} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2s-k}$$

となる。ここで、 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2s-k} = \zeta(2s+k)$ であるので、

$$P_2(s) = 2^s \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-s}{k} \zeta(2s+k) \quad \dots \dots (3.1)$$

を得る。(命題 1 (予想) の解説終)

命題 1 (予想) より、2 列目のパスカルゼータ関数 $P_2(s)$ の値は、よく知られているリーマンゼータの値を用いて得られることを示している。さらに、負の整数 s については、式(3.1)の右辺は有限和となるため、意味を持つ。以下において、具体的な負の整数 s に関する $P_2(s)$ の値を求める。

(例 1) 命題 1 (予想) が正しいとして、 $P_2(-1) = -\frac{1}{24}$ であることを示す。

$$P_2(-1) = 2^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1}{k} \zeta(-2+k) = \frac{1}{2} \left\{ \binom{1}{0} \zeta(-2) + \binom{1}{1} \zeta(-1) \right\}$$

である。ここで、リーマンゼータの値 $\zeta(-2) = 0$, $\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$ を用いると、 $P_2(-1) = -\frac{1}{24}$ であることがわかる。

(例 2) 命題 1 (予想) が正しいとして、 $P_2(-2) = \frac{1}{240}$ であることを示す。

$$P_2(-2) = 2^{-2} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2}{k} \zeta(-4+k) = \frac{1}{4} \left\{ \binom{2}{0} \zeta(-4) + \binom{2}{1} \zeta(-3) + \binom{2}{2} \zeta(-2) \right\}$$

である。ここで、リーマンゼータの値 $\zeta(-4) = \zeta(-2) = 0$, $\zeta(-3) = \frac{1}{120}$ を用いると、 $P_2(-2) = \frac{1}{240}$ であることがわかる。

4. n 列目のパスカルゼータ関数について（昨年度の研究）

2 列目のパスカルゼータ関数と同様の方法で、n 列目のパスカルゼータの一般項に関する公式も得られる。ここでは結果だけ述べる。

命題 2（予想）. s を負の整数とする。このとき、以下が成り立つ。

$$P_n(s) = (n!)^s \sum_{k_1, k_2, \dots, k_{n-1}=0}^{\infty} \binom{-s}{k_1} \binom{-s-k_1}{k_2} \cdots \binom{-s-k_1-\dots-k_{n-2}}{k_{n-1}} \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}^{k_1} \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix}^{k_2} \cdots \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}^{k_{n-1}} \zeta(ns + (n-1)k_1 + \dots + k_{n-1})$$

特に、主結果 3 において、 $s = -1$ の場合を考えると、次の結果を得る。

命題 3（予想）. s を負の整数とする。このとき、以下が成り立つ。

$$P_n(-1) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \zeta(-k)$$

命題 3（予想）は、フーリエ変換を思わせる式になっている。つまり、 $P_n(-1)$ をゼータ関数 $\zeta(-k)$ で分解したとき、スペクトルとなる係数がスターリング数 $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ となっているのである。このことから、この逆変換公式ができないかという問題も考えられる。

5. s が負のときの $P_2(s)$ の不連続なグラフ（今年度の研究）

これまで、パスカルゼータ関数 $P_n(s)$ の s はつねに負の整数値としてきたが、 Γ 関数を用いることで、 s を負の実数としても扱うことができる。すなわち、 $\binom{-s}{k} = \frac{(-s)!}{k!(-s-k)!} = \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(k+1)\Gamma(1-s-k)}$ に注意すると、 $P_2(s)$ に関する公式は以下となる。

$$P_2(s) = 2^s \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-s}{k}_{\Gamma} \zeta(2s+k) \quad \dots \dots \dots (6.1)$$

ここで、 $\binom{-s}{k}_{\Gamma} = \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(k+1)\Gamma(1-s-k)}$ とした。ところで、ここで大きな問題が起こっている。それは、式 (6.1) の右辺は収束するのかという問題である。これに関して、Srivastava [S] の研究結果を紹介する。それは、Ramanujan の結果などを用いたリーマンゼータ関数の無限和に関する研究で、

$$(1 - 2^{1-s})\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(s)_k}{k!} \frac{\zeta(s+k)}{2^{s+k}} \quad \dots \dots \dots (6.2)$$

というものである。ここで、 $(s)_k = \frac{\Gamma(s+k)}{\Gamma(s)}$ である。二つの式 (6.1) と (6.2) の右辺は非常に似ている式

であり、これからの研究に対して指針を示すものと考えている。

ここでも、式(6.1)の収束性を仮定して、具体的な計算を行う。ここで、無限和の計算を有限で近似するために、 k が十分大きいとき、 Γ 関数の相半公式 $\Gamma(1-s-k) = \frac{\pi}{\Gamma(s+k)\sin(s+k)\pi}$ とスターリン

グの公式 $\Gamma(k+1) \sim \sqrt{2\pi k} \left(\frac{k}{e}\right)^k$ を用いて、

$$\binom{-s}{k}_\Gamma \sim \Gamma(1-s) \left(\frac{e}{s+k-1}\right)^{-s+1} \left(\frac{s+k-1}{k}\right)^{k+0.5} \frac{\sin(s+k)\pi}{\pi}$$

として数値計算を行った。

ただし、重要な問題点が1つある。それは、式(6.1)において $2s+k=1$ となる s と k では $\zeta(2s+k) = \infty$ である、という点である。

この悩ましい問題に関して、今回は “ $2s+k=1$ となる s と k での計算は無視する” というこ
で処理した。

例えば、 $s = -0.1$ の場合、式(6.1)より、

$$P_2(-0.1) = 2^{-0.1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{0.1}{k}_\Gamma \zeta(-0.2+k)$$

である。したがって、 $2s+k=1$ となる s と k での計算は無視して、 $P_2(-0.1)$ の近似値

$$P_2(-0.1) = 2^{-0.1} \{0.1 \zeta(-0.2) - 0.045 \zeta(0.8) + 0.0285 \zeta(1.8) + \dots\} \sim -0.79866$$

が得られる。同様に計算して、 $P_2(-0.2)$ の近似値は、

$$P_2(-0.2) = 2^{-0.2} \{0.2 \zeta(-0.4) - 0.08 \zeta(0.6) + 0.048 \zeta(1.6) + \dots\} \sim -0.67932$$

となる。 $\binom{-s}{k}_\Gamma$ は k が大きくなるにつれ 0 に近づき、 $\zeta(k+2s)$ は k が大きくなるにつれ 1 に近づくこ

とが分かっているため、右辺は収束するものと考えている。

以下のグラフは、横軸が s 、縦軸が $P_2(s)$ としたときのグラフである。

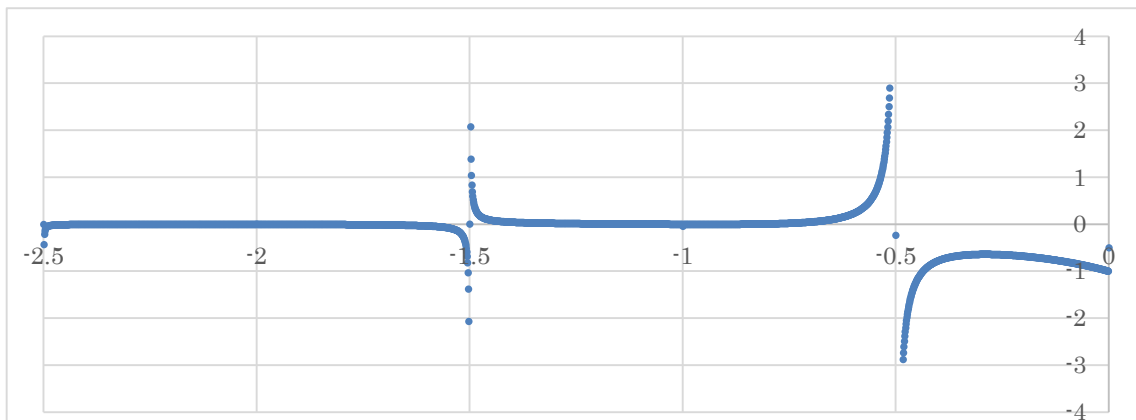


図2 ($P_2(s)$ のグラフ)

上のグラフから分かることは、 $P_2(s)$ としたときのグラフは $s = -0.5, -1.0, -1.5, -2.0, \dots$ のところで不連続となっている。特に $s = -0.5, -1.5, -2.5, \dots$ においては、ガンマ関数のグラフが負の整数の

ところで発散していることが影響していると考えられる。 $s = -1.0, -2.0, -3.0, \dots$ のところで不連続となっている原因は、 $s = -1.0, -2.0, -3.0, \dots$ の近傍の s において $2s + k = 1$ となる場合を無視したところにあることが考えられ、実際はこの点でも連続するものと思われる。

とりあえず、上で述べた設定での具体的な $P_2(s)$ ($-0.1 \leq s \leq -2.5$) の近似値は以下の表の通りとなっている。

s	-0.1	-0.2	-0.3	-0.4	-0.5	-0.6	-0.7	-0.8	-0.9	-1
P_2(s)	-0.79868	-0.67934	-0.63892	-0.77388	-0.2357	0.22853	0.049109	0.008955	-0.00054	-0.04167

s	-1.1	-1.2	-1.3	-1.4	-1.5	-1.6	-1.7	-1.8	-1.9	-2
P_2(s)	0.004507	0.011287	0.021439	0.044929	0.002946	-0.03422	-0.01254	-0.00518	-0.00171	0.004167

s	-2.1	-2.2	-2.3	-2.4	-2.5
P_2(s)	0.000686	0.000646	-0.00013	-0.00257	-0.0007

参考のためにガンマ関数のグラフを以下に挙げる。

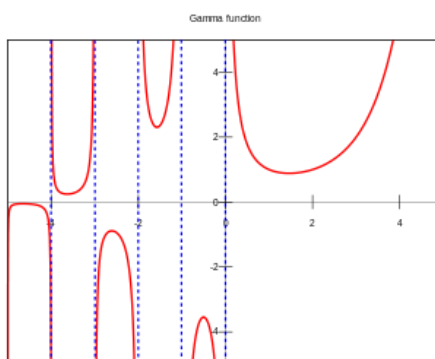


図4 (ガンマ関数のグラフ, 出典: Wikipedia)

6. s が負の整数のときの $P_2(s)$ の値の挙動 (今年度の研究)

s が負の整数のときの $P_2(s)$ の値を正確に計算すると、不思議な現象が現れた。命題1 (予想) の $P_2(s)$ の式から s が負の整数のときの $P_2(s)$ の値が有理数であることは明らかであるが、 $s = -1, -2, \dots, -100$ まで調査した結果、 $P_2(s)$ の値が常に有理数 $\frac{1}{a}$ という形として表されていたのである。ここでは $s = -10$ までの計算結果を挙げておく。

s	-1	-2	-3	-4	-5
a	-24	240	-2240	20160	-177408

s	-6	-7	-8	-9	-10
a	1537536	-13178880	112020480	-945950720	7945986048

また、以下のグラフは、 s が負の整数のときに関する $P_2(s)$ の値の挙動を表した図で、挙動を分かりやすくするために点と点を直線で繋いで表している。

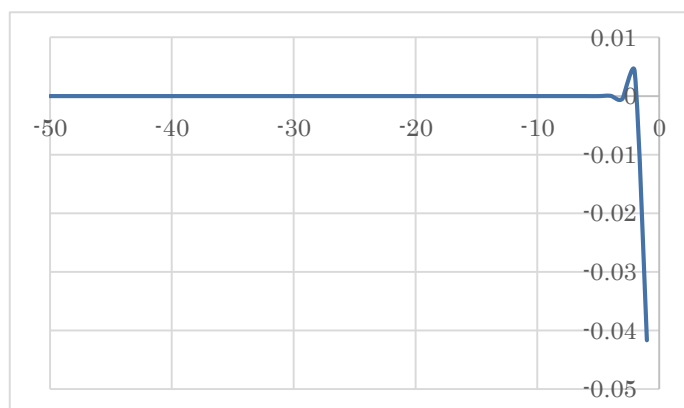


図3 (s が負の整数のときの $P_2(s)$ の挙動)

図3では分かりにくいですが、 $P_2(s)$ は s が小さくなるにつれ、符号を変えながら0に近づいている。その様子を分かりやすく表したものが図4である。その関数は

$$\frac{P_2(s)}{|P_2(s) \log_{10}|P_2(s)||}$$

とした。

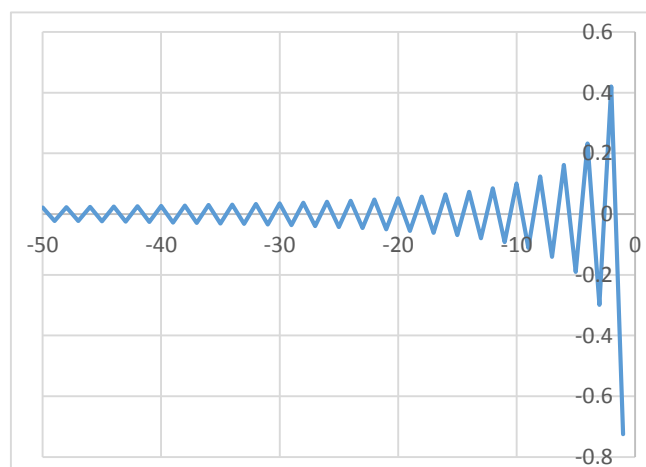


図4 (s が負の整数のときの $\frac{P_2(s)}{|P_2(s) \log_{10}|P_2(s)||}$ の挙動)

s が負の整数のときの $P_2(s)$ の値を考察したわけであるが、その挙動はゼータ関数の影響を受けるため符号を変えながら0に近づいている。そして $P_2(s)$ の値が常に有理数 $\frac{1}{a}$ という形をしている点には興味をもっており、特に a から得られる数列が気になっている。

7. 2列目パスカルゼータ関数 $P_2(s)$ の積分表示（今年度の研究）

リーマンゼータ関数の積分表示は、

$$\zeta(s) = \frac{1}{\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma(s)} \int_0^{\infty} \psi(x) x^{s-1} dx$$

であることは良く知られている．ここで、 $\psi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi x}$ であり、プサイ関数と呼ばれている．そして、関数等式

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s)$$

が成り立ち、これによって $\zeta(s)$ は $s \neq 1$ 以外の点で解析接続される．

5節において $P_2(s)$ のグラフを考えたが、 $s = -0.5, -1.5, -2.5, -3.5, \dots$ のところで不連続となっている．この不可解さを解消するために、 $P_2(s)$ の積分表示からのアプローチが大切であると考えた．

定理 1.

$$P_2(s) = \frac{1}{2\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \left(\sqrt[s]{e^x} \theta_2\left(0, e^{-\frac{x}{2}}\right) \right) x^{s-1} dx \quad (\operatorname{Re}(s) > 1)$$

ここで、 $\theta_2(0, q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2}$ で、ヤコビの楕円テータ関数と呼ばれるものである．

証明． ガンマ関数の定義から

$$\int_0^{\infty} e^{-nx} x^{s-1} dx = \Gamma(s) \frac{1}{n^s}$$

であり、 $m = \frac{n(n+1)}{2}$ とおくと、

$$\int_0^{\infty} e^{-mx} x^{s-1} dx = \Gamma(s) \frac{1}{m^s}$$

となる． $\sum_{n=1}^{\infty}$ を両辺に作用させると、 $\int_0^{\infty} e^{-nx} x^{s-1} dx$ が和と積分が交換可能であることから、 $\int_0^{\infty} e^{-mx} x^{s-1} dx$ も和と積分は交換可能となり、

$$\int_0^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-mx} \right) x^{s-1} dx = \Gamma(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m^s} = \Gamma(s) P_2(s)$$

を得る．ところで、

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-mx} = \frac{1}{2} \sqrt[s]{e^x} \theta_2\left(0, \sqrt{e^{-x}}\right)$$

であるので、

$$P_2(s) \Gamma(s) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left(\sqrt[s]{e^x} \theta_2\left(0, e^{-\frac{x}{2}}\right) \right) x^{s-1} dx$$

が得られる．（証明終）

8. 今後の課題

定理1から $\operatorname{Re}(s) > 1$ のときの $P_2(s)$ の積分表示が得られた。現在、関数等式をいつけてどの範囲に解析接続されるかを第1の課題にしている。5節で s が負の場合の $P_2(s)$ のグラフを近似計算から求めたが、その様子から考えると、 $P_2(s)$ のグラフは $s = -0.5, -1.5, -2.5, -2.5, \dots$ で発散する可能性が高い。これは $P_2(s)$ の定義を定理1の式とした場合、 $P_2(s)$ は $s = -0.5, -1.5, -2.5, -2.5, \dots$ 以外の領域で解析接続される可能性があることを意味する。そうすると、定理1の $P_2(s)$ の式から(まだ見つからない)関数等式を用いて、 $P_2(s)$ は $s = -0.5, -1.5, -2.5, -2.5, \dots$ 以外の点でより正確な値を求められることになり、5節で与えた $P_2(s)$ のグラフの検証、すなわち昨年度導いた $P_2(s)$ のリーマンゼータ関数を用いた級数公式の検証ができるものと考えている。

以上のことに関連して、以下のことも課題としている。

(1) 一般的に $P_n(s)$ の積分表示が得られるのか、そして解析接続の問題。

(2) $P_n(-1) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \zeta(-k)$ の逆変換が存在するかという問題。

*特に $P_2(s)$ の関数等式に関して、サイエンス・インカレで何かヒントを頂けるとありがたい。

参考文献

[N] L Navas, Analytic continuation of the Fibonacci Dirichlet series, Fibonacci Q. 39, 409-418 (2001)

[S] H. M. Srivastava, Sum of certain series of the Riemann Zeta function, Journal of mathematical analysis and applications 134, 129-140(1988)

[H] ハロルド・M・エドワーズ, ゼータ関数とリーマン予想, 講談社(2012)

[G] Gamma Function, wikipedia https://en.wikipedia.org/wiki/Gamma_function

[K] 黒川信重, 数学の夢 素数からのひろがり, 岩波書店(1998)

[U] D. ウエルズ, 数の辞典, 東京図書(1987)