

研究レポート（研究論文）

正多角形から得られるルーロー図形の研究

津山工業高等専門学校 総合理工学科 2年
加田 紘大

1. はじめに

よく知られているルーローの三角形は、正三角形の各頂点を中心に、半径がその正三角形の一辺となる円弧でできたものである（参照[1], [2]）。また、幅 s のルーローの三角形は、どの方向にも幅 s であるという特徴をもつため、辺の長さ s の正方形の中で内接しながら回転することができる。ロータリーエンジンはルーローの三角形のこの性質を利用している。またパナソニックの掃除用ロボットも部屋の隅をスムーズに掃除するために、ルーローの三角形の形状をとって主張している[3]。また、論文[4]に見られるように、ドリルの形状に関する工学的な研究も多くある。しかし、私は工学ではなく、このような不思議な形をした三角形の数学的性質に興味を覚え、普通の三角形とは違う、正三角形を対称的に膨らませた三角形にはどのような性質があるのかを研究することにした。

私は、ルーローの三角形の頂点で接線を2本引いてできた間の角が 120° である点に着目した。この理由は、ルーローの三角形を作るときの3つの円を見たとき、どの円も他の円の中心を通るからである。そしてこのとき、3つの円の中心を直線で結ぶと正三角形になる。それならば、3つの円を考え、どの円も他の円の中心を通らなくて、3つの円の中心を結んだとき正三角形となる状況から得られる対称的に膨らんだ三角形については、どんな性質があるのだろうかという疑問が沸いた。つまり、正三角形を対称的に膨らませた三角形で、頂点の角が 120° でないものについて研究したいと考えた。その後、研究は正多角形を対称的に膨らませた多角形の研究へと進んでいった。本論文では、正三角形を対称的に膨らませた三角形の研究から発見した定理と、正多角形を対称的に膨らませた多角形の研究から発見した定理を示し、これらを証明する。

2. 正三角形から得られるルーロー図形と反転図形

正三角形を対称的に膨らませた三角形を正確に定義する。

定義1（正三角形から作られるルーロー図形）。

正三角形 $A_1A_2A_3$ を考え、それを正三角形 A と呼ぶ。また、正三角形 A の重心を G とする。さらに $j = 1, 2, 3$ に対して、 A_j を中心とする半径1の円 A_j を考え、これらの隣り合う2つの円は交わっているものとする。円 A_1 と円 A_2 の交点で重心 G に近い方の点を R_1 とする。同様に円 A_2 と円 A_3 の交点で G に近い方の点を R_2 とし、さらに、円 A_3 と円 A_1 の交点で G に近い方の点を R_3 とする。このとき、3点 R_1, R_2, R_3 とその間の3つの弧 R_1R_2, R_2R_3, R_3R_1 で作られる図形を、正三角形 A から得られるルーロー図形と呼び、 $R[A]$ と書く。そして、3点 R_1, R_2, R_3 を $R[A]$ の頂点という。また、 $R[A]$ の1つの頂点における2つの弧の接線の間の角を、 $R[A]$ の角と呼ぶ。

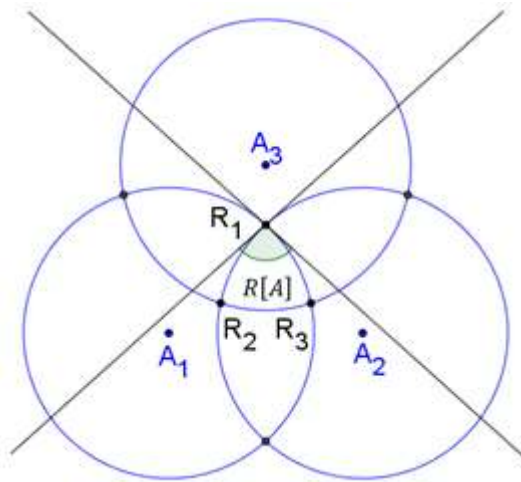


図1 ($R[A]$ と, $R[A]$ の角)

正三角形 A から得られるルーロー図形 $R[A]$ をより詳細に調べるために, フリーソフト GeoGebra を使って研究した. まず, 一般的には, $R[A]$ は凸型になるものと, 凹型になるものがあることがわかった.

(一般タイプ1) 円 $A_1 \cap$ 円 $A_2 \cap$ 円 $A_3 \neq \emptyset$ の場合, $R[A]$ は凸型である.

(一般タイプ2) 円 $A_1 \cap$ 円 $A_2 \cap$ 円 $A_3 = \emptyset$ の場合, $R[A]$ は凹型である.

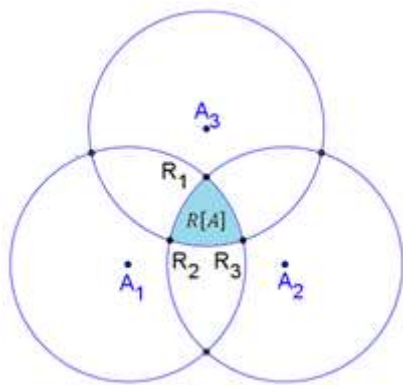


図2 (一般タイプ1)

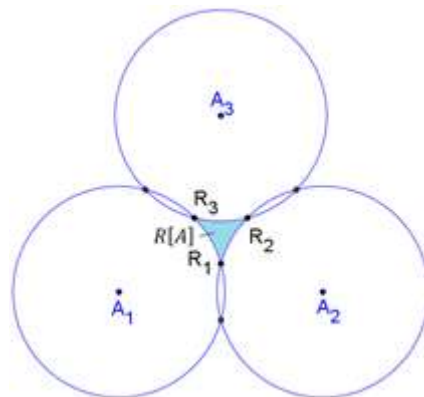


図3 (一般タイプ2)

しかし, それ以外にも, 特殊なタイプが2つ存在した. それは以下である.

(特殊タイプ1) 3点 A_1, A_2, A_3 が同じ点である場合, $R[A]$ は円である.

(特殊タイプ2) $R[A]$ が点となる場合がある.

$$|DR_1| = |A_3C| - |R_1C| - |A_3D| = \cos(\theta + 30^\circ) = |A_3D|$$

が得られる. すなわち, 線分 A_3R_1 は線分 B_3B_2 の垂直二等分線であることが示された.

(証明終)

命題 1 より, $R'[B]$ は $R[A]$ を正三角形 $R_1 R_2 R_3$ の辺に関して反転させたものとみることができる. したがって, $R'[B]$ を改めて $R[B]$ と書く.

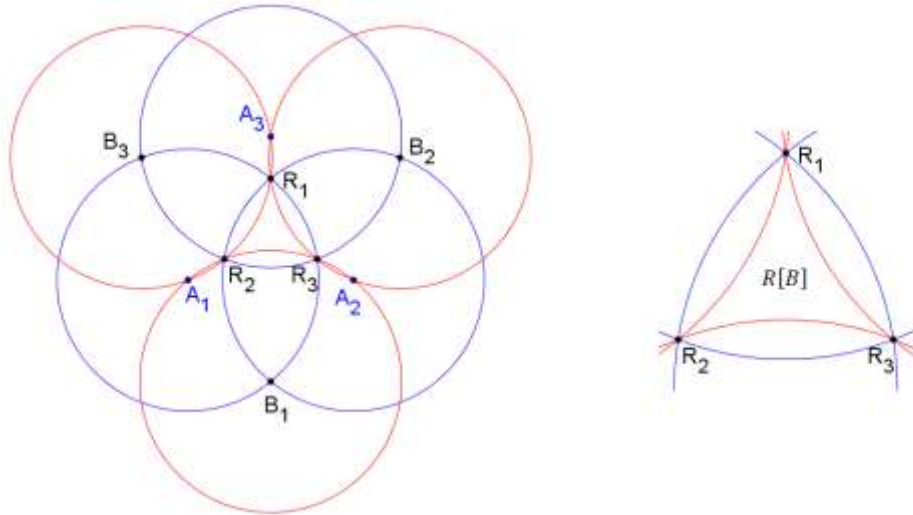


図 7 ($R[A]$ と $R[B]$)

定義 2 (反転図形). $R[B]$ を $R[A]$ の反転図形と呼ぶ.

2. 正三角形から得られるルーロー図形と反転図形の考察

$R[A]$ を正三角形 A から得られるルーロー図形, $R[B]$ を $R[A]$ の反転図形として, $R[A]$ と $R[B]$ を, (一般タイプ 1), (一般タイプ 2), (特殊タイプ 1), (特殊タイプ 2) でそれぞれ考察した.

(一般タイプ 1) $R[A]$ が凸型で, $R[B]$ は凹型である.

(一般タイプ 2) $R[A]$ が凹型で, $R[B]$ は凸型である.

(特殊タイプ 1) $R[A]$ は円で, $R[B]$ は点である.

(特殊タイプ 2) $R[A]$ と $R[B]$ は同じ点である.

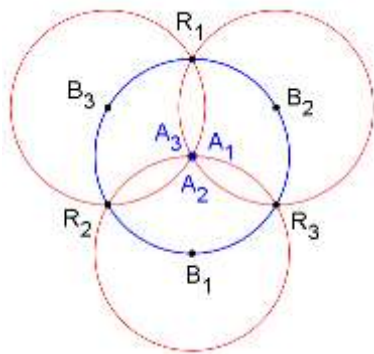


図8 (特殊タイプ1の $R[A]$ と $R[B]$)

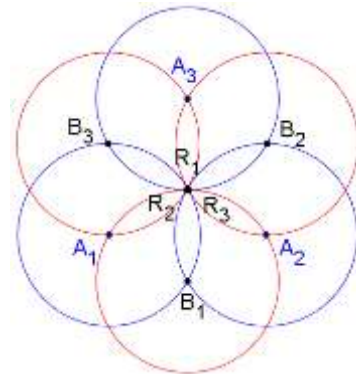


図9 (特殊タイプ2の $R[A]$ と $R[B]$)

正三角形 A から得られるルーロー図形 $R[A]$ とその反転図形 $R[B]$ の角に関する研究を、GeoGebra を使って行った. そして, 一般タイプにおいて, $R[A]$ の角を α , $R[B]$ の角を β としたとき, 次の関係式を発見した.

- (1) $\alpha \leq 120^\circ$ のとき, $\alpha + \beta = 120^\circ$, (2) $\alpha > 120^\circ$ のとき, $\alpha - \beta = 120^\circ$

上の結果を特殊タイプにも対応できるようにするために, 特殊タイプ1と2の $R[A]$ の角 α と $R[B]$ の角 β については, 以下のように定義すると良いことが分かった.

- (1) $R[A]$ または $R[B]$ が点であるときのそれらの角は 60° と定義する.
 (2) $R[A]$ または $R[B]$ が円であるときのそれらの角は 180° と定義する.

3. 正三角形から作られるルーロー図形に関する定理

以下に, 正三角形 A から得られるルーロー図形 $R[A]$ とその反転図形 $R[B]$ の角に関する定理について述べ, それを証明する.

定理1. $R[A]$ の角を α , $R[B]$ の角を β とすると, 以下が成り立つ.

- (1) $\alpha \leq 120^\circ$ のとき, $\alpha + \beta = 120^\circ$, (2) $\alpha > 120^\circ$ のとき, $\alpha - \beta = 120^\circ$

定理1を証明するには, 次の命題が必要となるので, まずこれを示す.

命題2. $R[A]$ の頂点 R_j について, R_j を通る2つの円 A_i と円 B_k の R_j の2つの接線の間の角は 60° である. 例えば図10でいえば, 点 R_2 における円 A_2 の接線 HI と, 点 R_2 にお円 B_1 の接線 JK との間の角 $\gamma = \angle HR_2J$ は 60° である.

(証明) 図 1 0 において, 三角形 $R_2B_1A_2$ は正三角形であるので, $\angle B_1R_2A_2 = 60^\circ$ である. このことと, 円 A_2 の接線 HI と円 B_1 の接線 JK から,

$$\angle JR_2I = 2 \times 90^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$
したがって, 角 $\gamma = \angle HR_2J = 60^\circ$
(証明終)

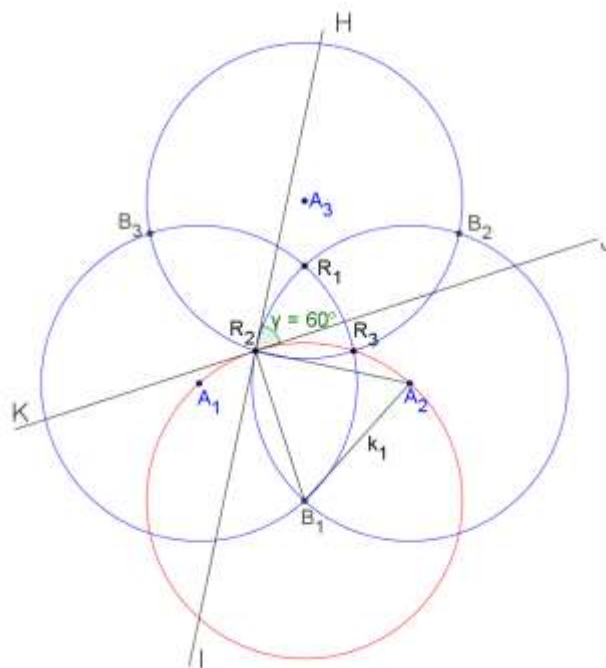


図 1 0 (角 $\gamma = \angle HR_2J$)

(定理 1 の証明) (1) の場合, すなわち $\alpha + \beta = 120^\circ$ であることを, 図 1 1 を用いて示す.

点 R_2 において図 1 1 では $\alpha = \angle HR_2P = \angle QR_2I$ である. また $\beta = \angle LR_2J$ である. $\gamma' = \angle JR_2I$ と置くと, 命題 2 より $\gamma' = 120^\circ$ である. そして $\gamma' = \angle QR_2L$ である. したがって, 点 R_2 の周りの角から,

$$\alpha + \beta + 2\gamma' = 360^\circ$$

が成り立つ. よって

$$\alpha + \beta = 120^\circ$$

である. (2) の場合も同様に示される. (証明終)

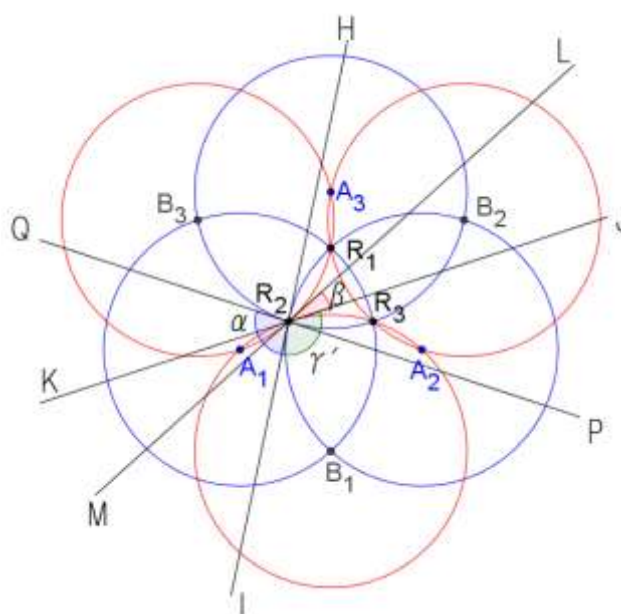


図 1 1

4. 正 n 角形から得られるルーロー図形

正三角形 A から得られるルーロー図形 $R[A]$ を一般化するために、正 n 角形での研究を行うことにした。

定義 3 (正 n 角形から得られるルーロー図形).

$n \geq 3$ とし、正 n 角形 $A_1A_2 \cdots A_n$ を考え、それを正 n 角形 A と呼ぶ。そしてその重心を G とする。さらに $j = 1, 2, \dots, n$ に対して、 A_j を中心とする半径 1 の円 A_j を考え、これらの隣り合う 2 つの円は交わっているものとする。円 A_j と円 A_{j+1} の交点で重心 G に近い方の点を R_j とする (ただし、 $j = n$ のとき $j + 1$ は 1 とする)。このとき、 n 個の点 R_1, R_2, \dots, R_n とその間の n 個の弧 $R_1R_2, R_2R_3, \dots, R_nR_1$ から作られる図形を、正 n 角形 A から得られるルーロー図形と呼び、 $R_n[A]$ と書く。そして、点 R_j を $R_n[A]$ の頂点という。また、 $R_n[A]$ の 1 つの頂点における 2 つの弧の接線の間の角を、 $R_n[A]$ の角と呼ぶ。

定義 4 ($R_n[A]$ に付随する図形).

$R_n[A]$ について円 A_1 と円 A_2 の交点で R_1 でない点を B_1 、同様に円 A_2 と円 A_3 の交点で R_2 でない点を B_2 というように、 n 個の点 B_1, B_2, \dots, B_n を考える。そして $j = 1, 2, \dots, n$ に対して、 B_j を中心とする半径 1 の円 B_j を考える。このとき円 B_j と円 B_{j+1} の交点で R_{j+1} でない点を R'_{j+1} とする。ただし、 $j = n$ のときは、円 B_n と円 B_1 の交点で R_1 でない点を R'_1 とする。このとき、 n 個の点 R'_1, R'_2, \dots, R'_n とその間の n 個の弧 $R'_1R'_2, R'_2R'_3, \dots, R'_nR'_1$ で作られる図形を $R'_n[B]$ と書き、 $R'_n[B]$ を $R_n[A]$ に付随する図形と呼ぶ。

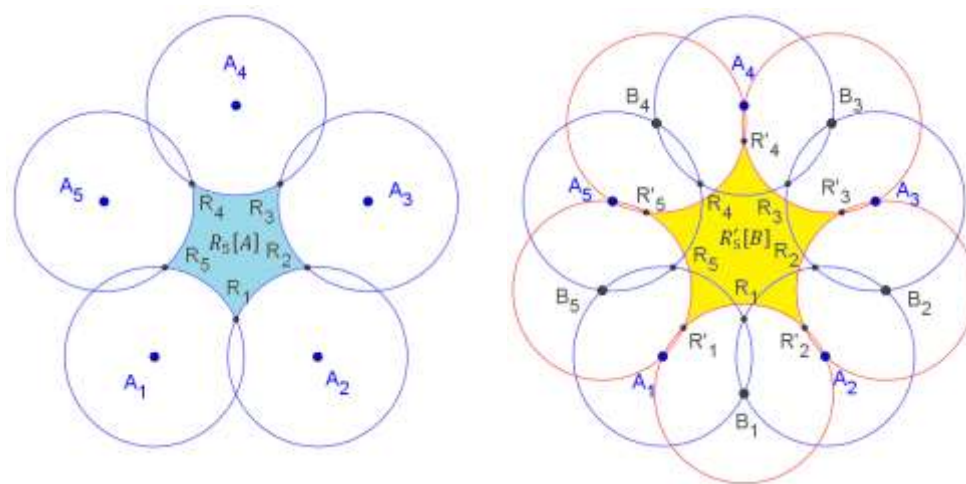


図 1.2 ($R_5[A]$ と $R_5[A]$ に付随する図形 $R'_5[B]$)

(注意) $n = 3$ のとき、命題 1 と定義 2 により、 $R_3[A]$ に付随する図形 $R'_3[B]$ は、 $R_3[A]$ の反転図形である。

$R_n[A]$ についても特殊タイプが2つあり、それらの場合の角を、以下のように定義しておく必要がある。

(特殊タイプ1) n 個の点 A_j が同じ点 G である場合、その反転図形 $R_n[B]$ は円となるが、この場合の円 $R_n[B]$ の角は 180° と定義する。

(特殊タイプ2) $R_n[A] = R_n[B]$ で点となる場合、その角は $\frac{180^\circ(n-2)}{n}$ と定義する。

5. 正 n 角形から得られるルーロー図形に関する定理

正三角形 A から得られるルーロー図形に関する定理1を一般化した次の定理を発見し、証明することができた。

定理2. 正 n 角形 A から作られるルーロー図形 $R_n[A]$ の角を α , $R_n[A]$ に付随する図形 $R_n[B]$ の角を β とすると、以下が成り立つ。

$$(1) \alpha \leq \frac{360^\circ}{n} \text{ のとき, } \alpha + \beta = \frac{360^\circ}{n}, \quad (2) \alpha > \frac{360^\circ}{n} \text{ のとき, } \alpha - \beta = \frac{360^\circ}{n}$$

証明には以下の2つの命題を使う。まずこれらを証明する。

命題3. $R_n[A]$ と $R_n[B]$ の中の角 $\angle R'_j B_j A_{j+1}$ について、

$$\angle R'_j B_j A_{j+1} = \frac{180^\circ(n-2)}{n}$$

が成り立つ。

(証明) 図13を用いて示す。

$|A_j B_{j-1}| = |A_j B_j| = |R'_j B_j| = |R'_j B_{j-1}| = 1$
 より、四角形 $A_j B_{j-1} R'_j B_j$ は菱形である。同様に、
 四角形 $A_{j+1} B_j R'_{j+1} B_{j+1}$ も菱形である。
 よって、

$$\angle R'_j B_j B_{j-1} = \angle A_{j+1} B_j B_{j+1}$$

である。正 n 角形の1つの角 $\angle B_{j-1} B_j B_{j+1}$ は

$$\angle B_{j-1} B_j B_{j+1} = \frac{180^\circ(n-2)}{n}$$

であるので、命題が成り立つ。(証明終)

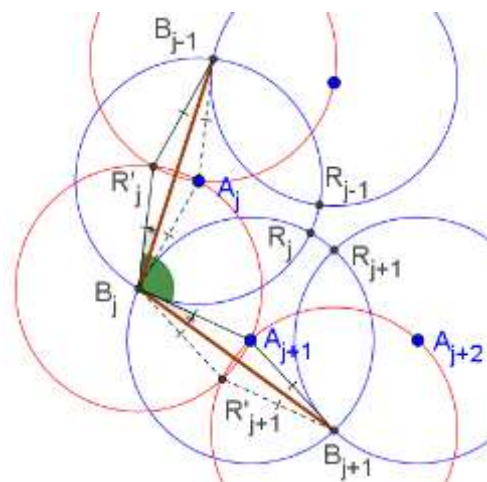


図13

命題 4. $R_n[A]$ と $R_n[B]$ を考える. このとき, 円 A_j の点 B_{j-1} における接線と, 円 B_j の点 R'_j における接線は平行である.

(証明) 図 1 4 を用いて示す.

$$|A_j B_{j-1}| = |B_{j-1} R'_j| = |R'_j B_j| = |A_j B_j| = 1$$

より, 四角形 $A_j B_{j-1} R'_j B_j$ は菱形である.

また, $\angle A_j B_{j-1} E = \angle B_j R'_j D = 90^\circ$ である. したがって, 接線 $B_{j-1} E$ と接線 $R'_j D$ は平行である. (証明終)

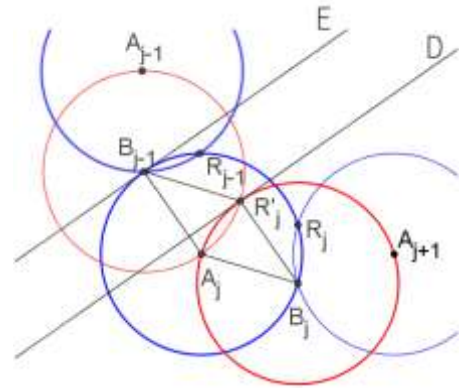


図 1 4

(定理 2 の証明) 図 1 5 を用いて(1)の場合を示す.

先ず対称性から, $\alpha = \angle P B_j Q$ としてよい.

命題 5 より, 直線 TQ と VW は平行なので

$\angle B_j D R'_{j+1} = \alpha$ である. 命題 3 より,

$$\gamma = \frac{180^\circ(n-2)}{n}$$

である. また,

$\angle R'_{j+1} B_j D = \gamma - 90^\circ$, $\angle B_j R'_{j+1} D = \beta + 90^\circ$

である. よって三角形 $B_j R'_{j+1} D$ より,

$$(\gamma - 90^\circ) + (\beta + 90^\circ) + \alpha = 180^\circ$$

である. したがって,

$$\alpha + \beta = \frac{360^\circ}{n}$$

が成り立つ. (2)も同様にして示される. (証明終)

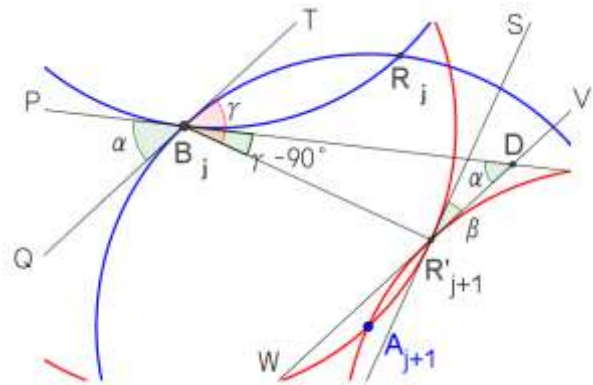


図 1 5

6. まとめと今後の研究方針

以上が, 今年度の研究成果である. 研究をスタートした頃は, いろいろな正三角形 A から得られるルーロー図形 $R[A]$ を描くために, GeoGebra の使い方をマスターすることに明け暮れた. そして, GeoGebra の使い方がある程度理解でき, $R[A]$ をスムーズに描き, 多くのデータをとれるようになったと同時に, $R[A]$ の反転図形を発見し, それにより定理 1 を発見することができた. 研究対象を正面からだけ見ているだけではダメで, 他の側面を見ることで, その研究対象の性質が見えてくるという体験ができたことはとてもうれしかった. その後, 定理

2を発見するのに時間はかからなかった。しかしそれを証明するまでにはかなりの時間がかかった。命題5の平行線を発見したことが大きな手掛かりとなり、それが定理2の証明に繋がった。

さて、これからの研究方針であるが、今年度取り組んできたルーロー図形を振り返ると、これらはすべて同半径の円を基礎として扱った曲線図形の研究である。円は離心率0の2次曲線であることを考えると、この視点から離心率1の放物線、離心率が0から1の間にある楕円、そして離心率が1より大きくなる双曲線を基礎として、ルーロー図形のような曲線で囲まれた図形を定義できるのではないだろうかと考えている。それは、任意の2次曲線を基礎とした曲線図形で不変な性質を研究することを意味するものである。現在、GeoGebraで離心率が0から1まで変化させてできる3つ合同な2次曲線から曲線図形を作って、それらを自由に動かすプログラムまでは完成させている。そして、それを使っていくつかの実験と観察をおこなっているが、まだ面白い現象を捉えてはいない。

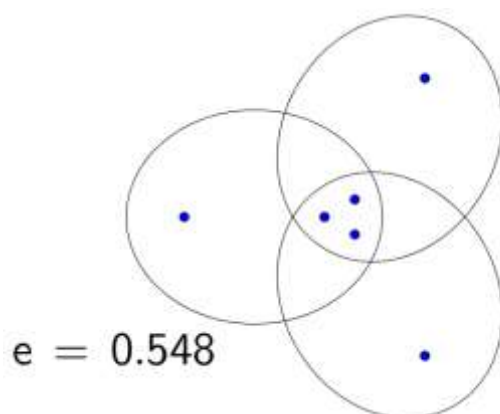


図16 (楕円によるルーロー図形)

参考文献

- [1] ルーローの三角形, Wikipedia,
<https://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%83%AB%E3%83%BC%E3%83%AD%E3%83%BC%E3%81%AE%E4%B8%89%E8%A7%92%E5%BD%A2>
- [2] ルーローの多角形, Wikipedia,
<https://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%83%AB%E3%83%BC%E3%83%AD%E3%83%BC%E3%81%AE%E5%A4%9A%E8%A7%92%E5%BD%A2>
- [3] ルーローの三角形と図形問題,
http://www.fumiononaka.com/Sample/Creators_MeetUp/Creators_MeetUp_161124.html
- [4] W. Gleiftner, H. Zeitler, The Reuleaux Triangle and its Center of Mass, Results in Mathematics, May 2000, Volume 37, Issue 3-4, pp 335-344