

研究レポート

## コラッツ問題を応用したウイルス感染の $\Lambda$ コラッツモデル

草加 修宏 (津山高専 2 年)

研究期間 : 2019 年 4 月 ~ 2019 年 9 月

## 1. 研究の目的と動機

1年生の数学の授業で使われた教材の中に、コラッツ問題[R]という未解決問題があり、とても興味をもった。その問題では、任意の自然数 $a$ について、 $a$ が偶数であれば $a/2$ とし、奇数であれば $3a + 1$ という変換を考える。これをコラッツ変換 $C(a)$ と呼ぶ。すなわち、

$$C(a) = \begin{cases} 3a + 1 & (a \text{が奇数のとき}) \\ \frac{a}{2} & (a \text{が偶数のとき}) \end{cases}$$

である。コラッツ問題とは、”有限回コラッツ変換を繰り返すと、どんな自然数 $a$ も1に変換される”というものである。コラッツ問題は、1937年にローター・コラッツが提示したことに由来し、これまで多くの人たちが興味を示してきた。しかし、コラッツ問題を解くことは難しく、数学者ポール・エルディシュさえも「数学はまだこの種の問題に対する用意ができていない」と述べている。したがって、その証明に真正面から取り組むことは私には難しく思われた。そこで、私はコラッツ問題を別な視点からとらえ、新しい類似の問題を提示できないかと考えた。

## 2. ウイルス感染とコラッツモデル

コラッツ問題を別な視点からとらえるために、コラッツ問題の解釈をいろいろと考えてみた。その1つの解釈として、ウイルス感染を考えた。ウイルス感染の現象は時間と共に感染数が多いのピークをとりながら増加し、最大ピーク後、ゆるやかに減少するイメージがある。東京都健康安全研究センターの研究年報[K]を見ると、特に、インフルエンザのツイート数の推移のグラフ(図1参照)が興味深かった。

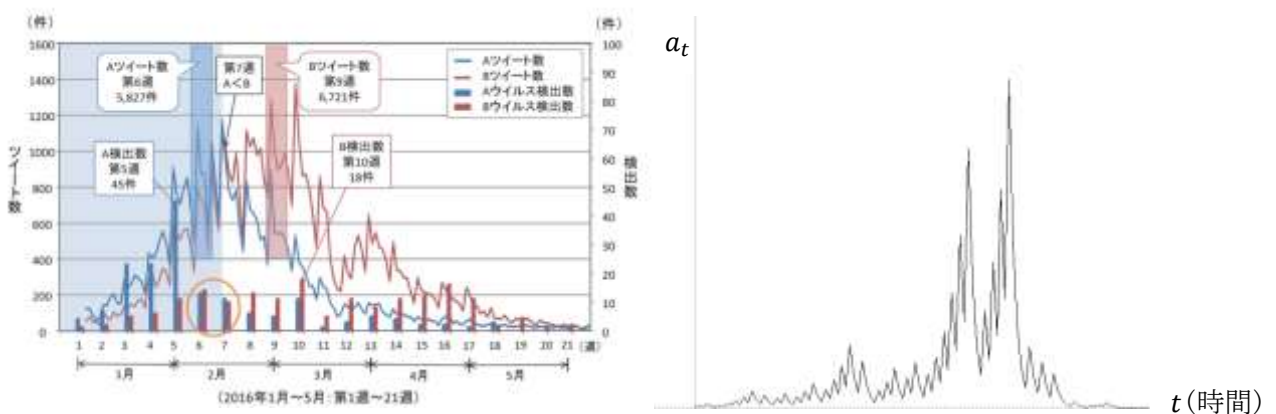


図1 (インフルエンザ感染グラフ(左)とコラッツ問題から得られるあるグラフ(右))

図1の右図はコラッツ問題の初期値 $a_0 = 27$ のグラフであるが、うまく $a_0$ を選べば、ツイート数の推移のグラフにもう少し類似するものがあるのではないかと考えた。この観点に立つとコラッツ問題は、数 $a_t$ を時間 $t$ での感染レベルと考えると、時間 $t$ での感染レベルが奇数という状態のときは $3a_t + 1$ 上昇し、偶数という状態のときは $a_t/2$ 降下すると解釈できる。そして、時間が十分経過した後、感染レベルは1になり、その後感染レベルは、 $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ という安定状態に達する。これが私の考えたコラッツ問題の解釈の1つである。このような意味で、コラッツ問題はウイルス感染の数理モデルの例を与えると考えることができ、コラッツ問題から得られるグラフはコラッツモデルと呼ぶにふさわしいと思えた。しかし、ウイルス感染のモデルは数多くあると思うの

で、コラッツモデルを応用して、新しい、いろいろなタイプのコラッツモデルを作ることができるのではないかと考えた。

図2と図3は今回の研究から得られた良性 $\Lambda$ コラッツモデル $C_\Lambda(a_0)$ と名付けたグラフの例であり、これら以外にも様々なタイプのグラフを量産するための理論を作った。

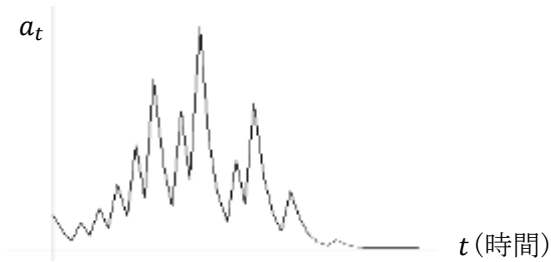


図2 ( $\Lambda = 1.629$ ,  $a_0 = 28$ の場合)

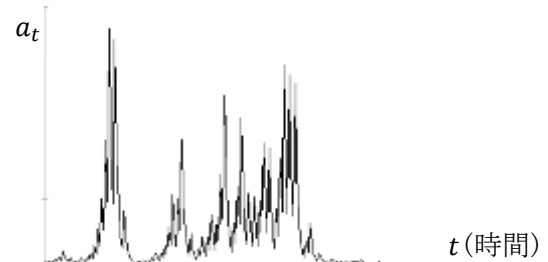


図3 ( $\Lambda = 1.906$ ,  $a_0 = 75$ の場合)

以下のセクションにおいて、今回研究した良性 $\Lambda$ コラッツモデル $C_\Lambda(a_0)$ について、詳細に説明していく。

### 3. コラッツモデル

コラッツモデルを正確に述べる。

**定義1.** 初期値を $a_0$ とするとき、 $a_n = C(a_{n-1})$ を、初期値 $a_0$ の連続コラッツ変換という。初期値 $a_0$ の連続コラッツ変換より、 $a_n$ が $n = k$ のとき $a_k = 1$ で、その後、 $1 \rightarrow a_{k+1} \rightarrow \dots \rightarrow a_r \rightarrow 1$ に変換されるとき、 $a_0$ は安定状態 $1 \rightarrow a_{k+1} \rightarrow \dots \rightarrow a_r \rightarrow 1$ に達するという。

T. Oliveira e Silva [S]は、2009年までに、コンピュータにより以下の定理を示した。

**定理1.** 初期値 $a_0$ の連続コラッツ変換により、 $1 \leq a_0 \leq 20 \times 2^{58}$ の任意の $a_0$ は、安定状態 $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ に達する。

定理1により、 $1 \leq a_0 \leq 20 \times 2^{58}$ の初期値 $a_0$ の連続コラッツ変換は、その特徴が明白となったため、ウイルスモデルとして扱うことができると考えた。これを、 $1 \leq a_0 \leq 20 \times 2^{58}$ における初期値 $a_0$ のコラッツモデルという。

### 4. 新しいコラッツモデルを作るための準備

$1 \leq a_0 \leq 20 \times 2^{58}$ における初期値 $a_0$ のコラッツモデルと異なるコラッツモデルを構築するために、コラッツ変換 $C(a)$ を以下のように見直した。

- (1) コラッツ変換 $C(a)$ において、 $a$ が奇数ならば、 $C(a) = 3a + 1$ と変換されるが、これは必ず偶数である。
- (2) したがって最初から、 $a$ が奇数のときは、以下のようにできる。

$$C(a) = \frac{3a + 1}{2} = 1.5a + 0.5$$

- (3) それならば、 $a$ が奇数のとき

$$C(a) = \text{Int}(1.5a)$$

としてもよいのではないか。ここで $\text{Int}(x)$ は $x$ の整数部を表す。

しかし、例えば、 $a_0 = 7$ から変換 $C(a) = \text{Int}(1.5a)$ を繰り返すと

$$7 \rightarrow \text{Int}(1.5 \times 7) = 10 \rightarrow 5 \rightarrow \text{Int}(1.5 \times 5) = 7$$

とループしてしまう。

(4)  $C(a) = 1.5a + 0.5$ の後半の $+0.5$ はコラッツ問題となるための補正項だと考えられる。

(5) 補正項なしにコラッツ問題のような問題を作ることはできないだろうか。

以上の議論から、以下を定義した。

**定義2.** ( $\Lambda$ コラッツ変換)  $\Lambda$ を正の実数とし

$$C_\Lambda(a) = \begin{cases} \text{Int}(\Lambda a) & (a \text{が奇数のとき}) \\ \frac{a}{2} & (a \text{が偶数のとき}) \end{cases}$$

とする。これを $\Lambda$ コラッツ変換と呼ぶ。

**定義3.** 初期値を $a_0$ とすると、 $a_n = C_\Lambda(a_{n-1})$ を、初期値 $a_0$ の連続 $\Lambda$ コラッツ変換という。

(注意1)  $a$ が奇数のとき $C_\Lambda(a) = 2\text{Int}(\Lambda a)$ と定義することもできる。この定義を用いた初期値 $a_0$ の連続 $\Lambda$ コラッツ変換から得られるグラフ上のピークの数、定義2から得られるものより多く、複雑な印象を与える。図2と図3は $a$ が奇数のとき $C_\Lambda(a) = 2\text{Int}(\Lambda a)$ を用いたグラフであった。

さて、 $1 \leq a_0 \leq 10^5$ の範囲で、初期値 $a_0$ の連続 $\Lambda = 1.41$ コラッツ変換をコンピュータで調査したところ、その範囲のすべての $a_0$ は安定状態 $1 \rightarrow 1$ に達することがわかった。さらに、

$$\Lambda = 1.4142, 1.41421, 1.414213, 1.4142135, 1.41421356, \dots$$

の連続 $\Lambda$ コラッツ変換においても、 $1 \leq a_0 \leq 10^5$ のすべての $a_0$ は安定状態 $1 \rightarrow 1$ に達した。 $\Lambda$ の精度をより上げてコンピュータで計算し、以下の定理を得た。

**定理2.**  $\Lambda = 1.4142135623$ とする。このとき、初期値 $a_0$ の連続 $\Lambda$ コラッツ変換により、 $1 \leq a_0 \leq 10^5$ のすべての $a_0$ は安定状態 $1 \rightarrow 1$ に達する。

$\Lambda = 1.4142135623$ について、定理2により、 $1 \leq a_0 \leq 10^5$ の初期値 $a_0$ の連続 $\Lambda$ コラッツ変換もウイルスモデルとして保証できると考える。さらに、 $\Lambda = \sqrt{2}$ が予想され、新しいコラッツ問題を構築することができた。

**予想1.** ( $\sqrt{2}$ コラッツ問題)

初期値 $a_0$ の連続 $\sqrt{2}$ コラッツ変換により、どんな自然数 $a_0$ も安定状態 $1 \rightarrow 1$ に達する。

## 5. ウイルス $\Lambda$ と $\Lambda$ コラッツモデル

前のセクションで、 $\Lambda = 1.4142135623$ について定理2を得て、さらに予想1を得ることができた。これを一般化するために以下を定義した。

**定義4.** 初期値 $a_0$ の連続 $\Lambda$ コラッツ変換により,  $1 \leq a_0 \leq N$ のすべての $a_0$ が安定状態に達するとき,  $\Lambda$ を $1 \leq a_0 \leq N$ における**良性ウイルス**と呼ぶ。 $\Lambda$ が良性ウイルスではないとき,  $\Lambda$ を**悪性ウイルス**という。 $\Lambda$ が $1 \leq a_0 \leq \infty$ における**良性(悪性)ウイルス**のときは単に**良性(悪性)ウイルス**という。

**定義5.**  $\Lambda$ が $1 \leq a_0 \leq N$ における**良性ウイルス**であるとき, 初期値 $a_0$ の連続 $\Lambda$ コラッツ変換を,  $1 \leq a_0 \leq N$ における**良性 $\Lambda$ コラッツモデル $C_\Lambda(a_0)$** という。 $\Lambda$ が**悪性ウイルス**のときは,  $1 \leq a_0 \leq N$ における**悪性 $\Lambda$ コラッツモデル $C_\Lambda(a_0)$** という。

(注意2) 定理2において $\Lambda = 1.414213562\mathbf{3}$ の末尾の数3を4に変えた $\Lambda = 1.414213562\mathbf{4}$ は, 悪性ウイルスである(図5参照)。このことから予想1は, 良性ウイルスが2のべき乗に関するのではないかという本研究の重要な作業仮説を与えた

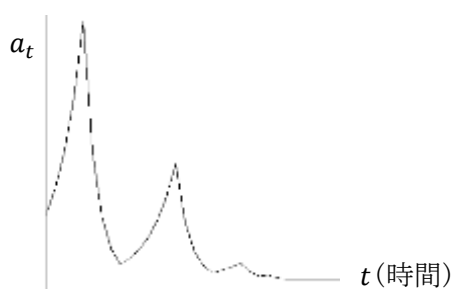


図4 ( $1 \leq a_0 \leq 10^5$ における  
良性 $\Lambda$ コラッツモデル $C_\Lambda(a_0)$ ,  
 $\Lambda = 1.414213562\mathbf{3}$ ,  $a_0 = 45$ )

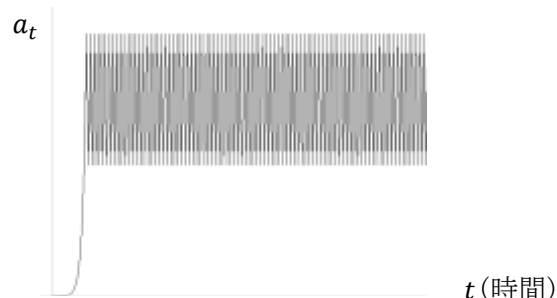


図5 ( $1 \leq a_0 \leq 10^5$ における  
悪性 $\Lambda$ コラッツモデル $C_\Lambda(a_0)$ ,  
 $\Lambda = 1.414213562\mathbf{4}$ ,  $a_0 = 27721$ )

## 6. 良性ウイルス $\Lambda$ の調査

今回の調査は, 初期値 $a_0$ を $1 \leq a_0 \leq 10^5$ の範囲で行った。すなわち,  $1 \leq a_0 \leq 10^5$ における良性ウイルス $\Lambda$ について調査した。ただし,  $n \leq 30000$ , すなわち変換の回数は30000回以下とした。

表1 (良性ウイルス $\Lambda$ の区間の下限 $< \Lambda <$ 上限のデータ)

	下限	上限		下限	上限		下限	上限		下限	上限		下限	上限		下限	上限
1	1.333	1.335	11	1.622	1.624	21	1.777	1.779	31	1.854	1.857	41	1.905	1.910	51	1.953	1.956
2	1.335	1.346	12	1.628	1.630	22	1.780	1.782	32	1.859	1.861	42	1.913	1.916	52	1.956	1.958
3	1.349	1.361	13	1.679	1.682	23	1.786	1.791	33	1.863	1.865	43	1.918	1.921	53	1.962	1.965
4	1.363	1.371	14	1.712	1.714	24	1.801	1.804	34	1.865	1.867	44	1.926	1.928	54	1.966	1.969
5	1.371	1.374	15	1.722	1.724	25	1.810	1.812	35	1.874	1.878	45	1.929	1.932	55	1.972	1.979
6	1.374	1.382	16	1.73	1.737	26	1.826	1.828	36	1.886	1.888	46	1.933	1.937	56	1.979	1.982
7	1.382	1.397	17	1.737	1.742	27	1.829	1.832	37	1.892	1.894	47	1.938	1.94	57	1.982	1.985
8	1.397	1.415	18	1.766	1.768	28	1.832	1.835	38	1.895	1.897	48	1.941	1.944	58	1.985	1.987
9	1.614	1.616	19	1.768	1.770	29	1.842	1.844	39	1.900	1.902	49	1.945	1.947	59	1.989	2.001
10	1.62	1.622	20	1.771	1.773	30	1.845	1.847	40	1.902	1.904	50	1.951	1.953			

表 1 (良性ウイルス $\Lambda$ の区間の下限 $< \Lambda <$ 上限のデータ) から, 以下の定理と予想が得られた。

**定理3.**  $1.333 < \Lambda < 2.001$ のとき,  $1 \leq a_0 \leq 10^5$ における良性ウイルス $\Lambda$ が存在する。

**予想2.** ( $\Lambda$ コラッツ問題)

- (1)  $\Lambda$ を良性ウイルスとする。このとき,  $1 < \Lambda < 2$ である。  
 (2)  $\Lambda \geq 2$ のとき,  $\Lambda$ は悪性ウイルスである。

## 7. $\Lambda$ コラッツ変換における良性ウイルス $\Lambda$ の範囲

$1 \leq a_0 \leq 10^5$ の良性ウイルス $\Lambda$ は $1.333 < \Lambda < 2.001$ にあることが分かったが, さらに良性ウイルス $\Lambda$ の区間の個数を詳細に調査してみた。すなわち, 前セクションでは $\Lambda$ の精度を $10^{-3}$ としていたが, それを $10^{-5}$ までとし, 区間の個数の変化を調べた。その結果が以下である。

$\Lambda$ の調査範囲 :  $1.1 \leq \Lambda \leq 1.42$ ,  $a_0$ の範囲 :  $1 \leq a_0 \leq 10^5$

表 2 (良性ウイルス $\Lambda$ の区間の個数)

$\Lambda$ の精度	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$
$N$	1	8	28	149

$N$ は $1 \leq a_0 \leq 10^5$ における良性ウイルス $\Lambda$ の区間の個数を表す。

(考察)  $\Lambda$ の精度を上げると,  $1 \leq a_0 \leq 10^5$ の良性ウイルス $\Lambda$ の区間の個数 $N$ が多くなったので,  $1 \leq a_0 \leq 10^5$ の良性ウイルス $\Lambda$ の各区間の幅がどんどん小さくなると考えられる。このことから,  $\Lambda$ の各区間はある数に収束するかもしれないと思われる。

注意 2 を元に, 具体的な 2 のべき乗の形をした良性ウイルス $\Lambda$ を調査するために,  $d$ と $r$ を正の整数である定数として,  $\Lambda$ を

$$\Lambda_n^{d,r} = 2 \left( \frac{1}{d} + \frac{1}{d^{1+r}} + \frac{1}{d^{1+2r}} + \frac{1}{d^{1+3r}} + \dots + \frac{1}{d^{1+nr}} \right)$$

と定義し,  $2 < d \leq 5, 1 \leq r \leq 2, 1 \leq n \leq 10, 1 \leq a_0 \leq 10^5$ の範囲で, これらが良性ウイルスかどうかを調査した。次の予想が立った。

**予想3.** (2 のべき乗の形をした良性ウイルス $\Lambda_n^{d,r}$ )

以下の $\Lambda_n^{d,r}$ は良性ウイルスである。

- (1)  $\Lambda_n^{2,1}$  (ただし $n = 4$ は除く)      (2)  $\Lambda_\infty^{3,1} = \sqrt{2}$  と  $\Lambda_n^{3,1}$  (ただし $n \geq 2$ )  
 (3)  $\Lambda_\infty^{2.5,2}$  と  $\Lambda_n^{2.5,2}$  (ただし $n \geq 2$ )      (4)  $\Lambda_\infty^{1.724,2}$  と  $\Lambda_n^{1.724,2}$  (ただし $n \geq 16$ )  
 (5)  $\Lambda_\infty^{1.71,2}$  と  $\Lambda_n^{1.71,2}$  (ただし $n \geq 8$ )      (6)  $\Lambda_\infty^{1.664,2}$  と  $\Lambda_n^{1.664,2}$  (ただし $n \geq 12$ )

## 8. コラッツモデルと $\Lambda$ コラッツモデルの比較

$1 \leq a_0 \leq 20 \times 2^{58}$ のコラッツモデルと $1 \leq a_0 \leq 10^5$ における良性 $\Lambda$ コラッツモデル $C_\Lambda(a_0)$ の違いを研究した。これは単にモデルを比較するというだけの研究ではなく, これらのモデルから得られたコラッツ問題と $\Lambda$ コラッツ問題の難易度を比較するという意図もある。

以下が調査結果である。ここで、初期値 $a_0$ の連続 $\Lambda$ コラッツ変換 $a_n = C_\Lambda(a_{n-1})$ について、以下の量を定義した。

$N(a_0)$  :  $a_0$ から変換された $a_n$ が奇数となる個数

調査範囲 : (1)  $1 \leq a_0 \leq 10^5$ , (2)  $10^5 \leq a_0 \leq 2 \times 10^5$ , (3)  $2 \times 10^5 \leq a_0 \leq 3 \times 10^5$

表3 ( $1 \leq a_0 \leq 3 \times 10^5$ におけるコラッツモデルの場合)

ただし、コラッツ変換は $C(a)$ ,  $a$ が奇数のとき $C(a) = 1.5a + 0.5$ とした。

調査範囲	(1)	(2)	(3)	$1 \leq a_0 \leq 3 \times 10^5$
$N(a_0)$ の平均	38	42.8	44.6	41.8
$N(a_0)$ の標準偏差	20.1	21.1	21.5	21.1
$N(a_0)$ の最大値	129	141	164	164

表4 ( $1 \leq a_0 \leq 3 \times 10^5$ における良性 $\sqrt{2}$ コラッツモデルの場合)

調査範囲	(1)	(2)	(3)	$1 \leq a_0 \leq 3 \times 10^5$
$N(a_0)$ の平均	20.1	22.7	23.9	22.2
$N(a_0)$ の標準偏差	7.6	7.9	8.1	8
$N(a_0)$ の最大値	70	69	71	71

表5 ( $1 \leq a_0 \leq 3 \times 10^5$ における良性 $\sqrt[12]{2^5}$ コラッツモデルの場合)

調査範囲	(1)	(2)	(3)	$1 \leq a_0 \leq 3 \times 10^5$
$N(a_0)$ の平均	23	26.4	27.6	25.7
$N(a_0)$ の標準偏差	9.6	10.3	10.6	10.4
$N(a_0)$ の最大値	81	87	91	91

表6 ( $1 \leq a_0 \leq 3 \times 10^5$ における良性 $\sqrt[3]{2^3}$ コラッツモデルの場合)

調査範囲	(1)	(2)	(3)	$1 \leq a_0 \leq 3 \times 10^5$
$N(a_0)$ の平均	25.2	28	30.1	28
$N(a_0)$ の標準偏差	10.2	10.8	11.2	11
$N(a_0)$ の最大値	73	86	94	94

表7 ( $1 \leq a_0 \leq 3 \times 10^5$ における良性 $\sqrt[9]{2^4}$ コラッツモデルの場合)

調査範囲	(1)	(2)	(3)	$1 \leq a_0 \leq 3 \times 10^5$
$N(a_0)$ の平均	25	28.6	30.2	27.9
$N(a_0)$ の標準偏差	10.4	11.2	11.7	11.3
$N(a_0)$ の最大値	83	89	97	97

(考察)

(1)  $N(a_0)$ の平均について

コラッツモデルにおいては、 $N(a_0)$ の平均が40程度に対して、良性 $\Lambda$ コラッツモデルはその半分くらいの値をとった。これはコラッツモデルから得られるグラフの方が、 $\Lambda$ コラッツモデルのグラフよりピークの個数が大きいことを意味する。

(2)  $N(a_0)$ の標準偏差について

コラッツモデルは、 $N(a_0)$ の標準偏差が21程度であるのに対して、良性 $\Lambda$ コラッツモデルは8~10程度である。これは、コラッツモデルの方が、良性 $\Lambda$ コラッツモデルのグラフより初期値 $a_0$ のグラフによってピークの個数にばらつきが大きいことを意味する。

(3)  $N(a_0)$ の最大値について

コラッツモデルは、 $N(a_0)$ の最大値が129~164程度に対して、良性 $\Lambda$ コラッツモデルは70~100程度である。これも、コラッツモデルの方が、良性 $\Lambda$ コラッツモデルのグラフよりピークが多い複雑なグラフが存在していることを意味する。

以上のことをコラッツ問題と良性 $\Lambda$ コラッツ問題を解くという視点から考えてみると、良性 $\Lambda$ コラッツ問題よりコラッツ問題の方が、難易度が高い問題となっていると判断できる。したがって、良性 $\Lambda$ コラッツ問題は、コラッツ問題より、その証明に取り組みやすいものであり、もし良性 $\Lambda$ コラッツ問題が解決できれば、従来のコラッツ問題を解決する糸口になるだろうと考えている。

## 9. コラッツ3問題

コラッツ問題は奇数と偶数から得られるルールであり、それを発展させた私の研究である $\Lambda$ コラッツ問題は、 $\sqrt{2}$ や2のべき乗と関係があると予想している。そこで、任意の自然数 $a$ に関する変換を3パターンに分けた場合、さらに新しいコラッツ問題を作ることができるのではないかと考えた。

改めてコラッツ変換 $C(a)$ を見直すと、自然数 $a$ に対して $C(a)$ は、 $a$ が奇数のときと偶数のときでそれぞれ変換式が定義されている。これは $a$ を2で割った余りが1のときと、余りが0のときで区別しているものとする。そうすると、3で割った余りに応じて、変換式をたて、新たなコラッツ問題が作れるだろうと考えた。文献を調査すると、三室、西村、平松の論文[M]に3で割った余りに応じた変換式の研究があった。これを参考に、以下の変換式を定義した。

定義6. (コラッツ3変換 $C(a, 3)$ )

$$C(a, 3) = \begin{cases} 2a - 1 & (a \equiv 2 \pmod{3} \text{ のとき}) \\ 4a + 2 & (a \equiv 1 \pmod{3} \text{ のとき}) \\ \frac{a}{3} & (a \equiv 0 \pmod{3} \text{ のとき}) \end{cases}$$

を、コラッツ3変換と呼ぶ。

定義7. 初期値を $a_0$ とするとき、 $a_n = C(a_{n-1}, 3)$ を、初期値 $a_0$ の連続コラッツ3変換という。



例  $a_0 = 7$ の場合.

$$7 \rightarrow 4 \times 7 + 2 = 30 \rightarrow 10 \rightarrow 42 \rightarrow 14 \rightarrow 2 \times 14 - 1 = 27 \rightarrow 9 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 6 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$$

初期値 $a_0$ の連続コラッツ3変換を調べた結果、 $1 \leq a_0 \leq 10^6$ のどんな $a_0$ も、安定状態 $1 \rightarrow 6 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ に達した。このことから、以下の定理と予想を得た。

**定理4.** 初期値 $a_0$ の連続コラッツ3変換により、 $1 \leq a_0 \leq 10^6$ の任意の $a_0$ は、安定状態 $1 \rightarrow 6 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ に達する。

**予想4.** (コラッツ3問題)

任意の自然数 $a_0$ は、初期値 $a_0$ の連続コラッツ3変換により、安定状態 $1 \rightarrow 6 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ に達する。

## 10. $\Lambda$ コラッツ3変換と $\Lambda$ コラッツ3問題

コラッツ3変換から $\Lambda$ コラッツ3変換を以下のように定義する。

**定義8.** ( $\Lambda$ コラッツ3変換)  $\Lambda$ を正の実数とし

$$C_{\Lambda}(a, 3) = \begin{cases} 2a - 1 & (a \equiv 2 \pmod{3} \text{ のとき}) \\ \text{Int}(\Lambda a) & (a \equiv 1 \pmod{3} \text{ のとき}) \\ \frac{a}{3} & (a \equiv 0 \pmod{3} \text{ のとき}) \end{cases}$$

を、 $\Lambda$ コラッツ3変換と呼ぶ。

定理2と同様に、この場合は $\Lambda = \sqrt{3}$ が意味をもつと考えた。コンピュータにより以下の定理と予想を得た。

**定理5.**  $\Lambda = 1.7320508075$ とする。このとき、初期値 $a_0$ の連続 $\Lambda$ コラッツ変換により、 $1 \leq a_0 \leq 10^5$ すべての $a_0$ は安定状態 $1 \rightarrow 1$ に達する。

**予想5.** ( $\sqrt{3}$ コラッツ3問題)

初期値 $a_0$ の連続 $\sqrt{3}$ コラッツ3変換により、どんな自然数 $a_0$ も安定状態 $1 \rightarrow 1$ に達する。

(注意3) 定理5において $\Lambda = 1.7320508075$ の末尾の数5を6に変えた $\Lambda = 1.7320508076$ は、悪性ウイルスである。

以下、どのような $\Lambda$ が良性ウイルス $\Lambda$ となるのかを、セクション6と同様に研究した。そして、表8のデータから以下の定理と予想が得られた。

**定理6.**  $1.307 < \Lambda < 2.999$ のとき、 $1 \leq a_0 \leq 10^6$ における良性ウイルス $\Lambda$ が存在する。

**予想6.** ( $\Lambda$ コラッツ3問題)

- (1)  $\Lambda$ を良性ウイルス $\Lambda$ とする。このとき、 $1 < \Lambda < 3$ である。
- (2)  $\Lambda \geq 3$ のとき、 $\Lambda$ は悪性ウイルス $\Lambda$ である。

表 8 (良性ウイルス $\Lambda$ の区間の下限 $< \Lambda <$ 上限のデータ)

1	1.307	1.311	11	1.402	1.415	21	1.726	1.728	31	1.919	1.922	41	2.049	2.064	51	2.116	2.119
2	1.315	1.317	12	1.417	1.422	22	1.728	1.733	32	1.922	1.924	42	2.064	2.071	52	2.119	2.122
3	1.320	1.325	13	1.422	1.443	23	1.857	1.866	33	1.984	1.986	43	2.071	2.076	53	2.181	2.185
4	1.326	1.336	14	1.448	1.450	24	1.866	1.869	34	1.986	1.988	44	2.076	2.078	54	2.193	2.196
5	1.336	1.351	15	1.464	1.466	25	1.869	1.871	35	1.988	1.990	45	2.078	2.080	55	2.213	2.228
6	1.353	1.355	16	1.466	1.471	26	1.871	1.874	36	1.999	2.018	46	2.090	2.097	56	2.233	2.235
7	1.357	1.369	17	1.472	1.475	27	1.874	1.876	37	2.023	2.025	47	2.099	2.105	57	2.237	2.239
8	1.369	1.375	18	1.476	1.501	28	1.877	1.890	38	2.025	2.027	48	2.106	2.109	58	2.242	2.251
9	1.375	1.392	19	1.714	1.718	29	1.901	1.907	39	2.031	2.038	49	2.110	2.112	59	2.368	2.382
10	1.392	1.402	20	1.718	1.725	30	1.907	1.917	40	2.039	2.047	50	2.112	2.116	60	2.571	2.573

61	2.573	2.576	71	2.670	2.673	81	2.796	2.798	91	2.833	2.835	101	2.884	2.888
62	2.578	2.580	72	2.677	2.679	82	2.803	2.805	92	2.841	2.843	102	2.903	2.906
63	2.580	2.589	73	2.682	2.686	83	2.805	2.811	93	2.846	2.849	103	2.908	2.911
64	2.592	2.599	74	2.689	2.695	84	2.811	2.813	94	2.849	2.852	104	2.911	2.913
65	2.647	2.653	75	2.695	2.699	85	2.813	2.816	95	2.853	2.856	105	2.923	2.925
66	2.654	2.656	76	2.699	2.702	86	2.816	2.818	96	2.856	2.860	106	2.926	2.928
67	2.658	2.661	77	2.703	2.705	87	2.818	2.822	97	2.861	2.863	107	2.976	2.978
68	2.662	2.665	78	2.706	2.708	88	2.822	2.827	98	2.863	2.866	108	2.978	2.980
69	2.665	2.667	79	2.746	2.750	89	2.827	2.831	99	2.866	2.876	109	2.980	2.983
70	2.667	2.669	80	2.788	2.792	90	2.831	2.833	100	2.881	2.883	110	2.997	2.999

### 11. $\Lambda$ コラッツ3変換における良性ウイルス $\Lambda$ の区間

$1 \leq a_0 \leq 10^5$ の良性ウイルス $\Lambda$ は $1.333 \leq \Lambda \leq 2$ であることが分かったが、さらに良性ウイルスの範囲の数を詳細に調査してみた。

$\Lambda$ の調査範囲 :  $1.1 \leq \Lambda \leq 1.74$ ,  $a_0$ の範囲 :  $1 \leq a_0 \leq 10^5$

表 9 ( $\Lambda$ コラッツ3モデルにおける良性ウイルス $\Lambda$ の区間の個数)

$\Lambda$ の精度	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$
$N$	4	22	55	159

ただし、 $N$ は $1 \leq a_0 \leq 10^5$ における良性ウイルスの区間の個数を表す。

(考察) セクション7の考察と同様に、 $\Lambda$ の精度を上げると、 $1 \leq a_0 \leq 10^5$ の良性ウイルス $\Lambda$ の区間の個数 $N$ が多くなったので、 $1 \leq a_0 \leq 10^5$ の良性ウイルス $\Lambda$ の各区間の幅がどんどん小さくなると考えられる。このことから、 $\Lambda$ の各区間はある数に収束するかもしれないと思われる。

注意3を元に、具体的な3のべき乗の形をした良性ウイルス $\Lambda$ を調査するために、 $d$ と $r$ を正の整数である定数として、 $\Lambda$ を

$$\Lambda_n^{d,r} = 3\left(\frac{1}{d} + \frac{1}{d^{1+r}} + \frac{1}{d^{1+2r}} + \frac{1}{d^{1+3r}} + \cdots + \frac{1}{d^{1+nr}}\right)$$

と定義し、 $2 < d \leq 5, 1 \leq r \leq 2, 1 \leq n \leq 10, 1 \leq a_0 \leq 10^5$ の範囲で、これらが良性ウイルスかどうかを調査した。次の予想が立った。

**予想7.** (3のべき乗の形をした良性ウイルス $\Lambda_n^{d,r}$ )

以下の $\Lambda_n^{d,r}$ は良性ウイルスである。

- |   |   |
|---|---|
| (1) $\Lambda_\infty^{3,1} = \sqrt{3}$ と $\Lambda_n^{3,1}$ (ただし $n = 2, 3, 5$ は除く) | (2) $\Lambda_\infty^4 = \sqrt[3]{3}$ と $\Lambda_n^{4,1}$ (ただし $n \geq 1$ )  |
| (3) $\Lambda_\infty^{5,1} = \sqrt[4]{3}$ と $\Lambda_n^{5,1}$ (ただし $n \geq 5$ )    | (4) $\Lambda_\infty^{2,0004,1}$ と $\Lambda_n^{2,0004,1}$ (ただし $n \geq 25$ ) |
| (5) $\Lambda_\infty^{3,2}$ と $\Lambda_n^{3,2}$ (ただし $n \geq 1$ )                  | (6) $\Lambda_\infty^{4,2}$ と $\Lambda_n^{4,2}$ (ただし $n \geq 1$ )            |
| (7) $\Lambda_\infty^{4,3}$ と $\Lambda_n^{4,3}$ (ただし $n \geq 1$ )                  |   |

## 12. 今後の研究計画

コラッツ変換、 $\Lambda$ コラッツ変換をより一般化し、様々なウイルス感染の数理モデルの基礎理論をつくりたいと考えている。具体的には以下のことを計画している。

- (1) コラッツ5変換 $C(a, 5)$ , コラッツ7変換 $C(a, 7)$ を定義する。
- (2)  $\Lambda$ コラッツ5変換 $C_\Lambda(a, 5)$ や $\Lambda$ コラッツ7変換 $C_\Lambda(a, 7)$ を定義し、 $\Lambda$ コラッツ5モデルや $\Lambda$ コラッツ7モデルを構築する
- (3) より一般の $\Lambda$ コラッツ $n$ モデルの理論の構築する。
- (4) 悪性 $\Lambda$ コラッツモデル $C_\Lambda(a_0)$ についての詳細研究を行う。すなわち、時系列変動の特異点 $a_0$ の研究(時間の経過後高いレベルでループに達する $a_0$ とは何か)といった立場から行なう。
- (5) 空間的なコラッツ変換のモデルを構築する。

## 参考文献

- [K] 北村有里恵 他, 東京都内インフルエンザ流行状況の把握を目的としたツイート数の有用性の検討, 東京健安研七年報 Ann. Rep. Tokyo Metr. Inst. Pub. Health, 68, 65-69, 2017
- [S] T. Oliveira e Silva, Computational verification of the 3x+1 conjecture, [http://sweet.ua.pt/tos/3x\\_plus\\_1.html](http://sweet.ua.pt/tos/3x_plus_1.html)
- [M] 三室智明, 西村滋人, 平松豊一, コラッツ予想について, 法政大学計算科学研究センター研究報告 16, pp.143-147, 2003, [https://www.media.hosei.ac.jp/bulletin\\_archives/vol16\\_25.pdf](https://www.media.hosei.ac.jp/bulletin_archives/vol16_25.pdf)
- [R] リチャード・ガイ, 数論における未解決問題集, シュプリンガー・フェアラーク東京, 1990 第2刷, pp.174-176