課題発見能力のトレーニング

数論の未解決問題からの
発想と発展

―　鑑賞と問いかけから新たなテーマへ ―

松田　修（津山高専）

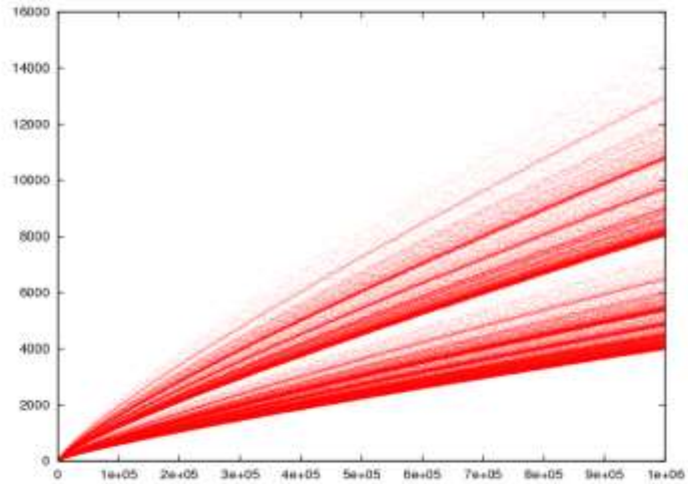
ゴールドバッハ予想：4 以上の偶数は二つの素数の和で表すことができる。

【現状】4×10^{18}くらいまでは正しいことが証明されている。

【鑑賞】

$6=3+3$，$8=3+5$，$10=7+3=5+5$，$12=5+7$，$14=3+11=7+7$

$16=3+13=5+11$，$18=5+13=7+11$，$20=3+17=7+13$



横軸の偶数nに対して二つの素数で表す方法が何通りあるか表したグラフ
（Wikipedia より）

【問いかけ】

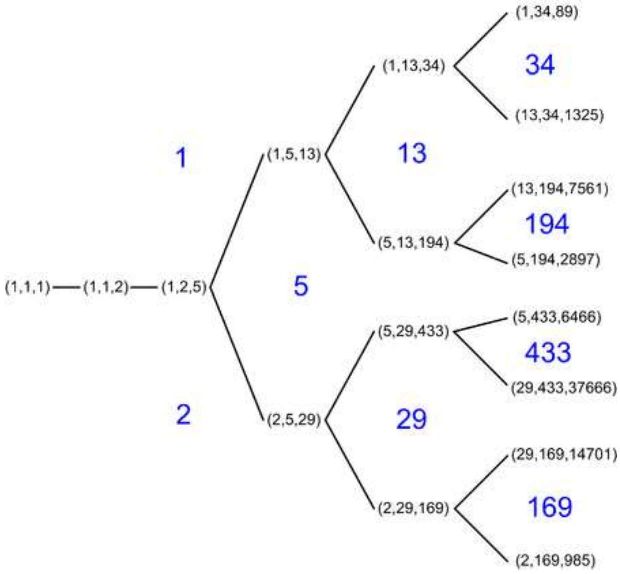
（1）ゴールドバッハ予想の上のグラフは，カッシーニの間隙のようなものが見えて面白い。ゴールドバッハ予想を面白く見せる新たな鑑賞法は考えられないものか。

（2）ゴールドバッハ予想と類似のものに，practical number 数に関する定理や「全ての大きな奇数（n ＞ 5）は 1 つの素数と 1 つの素数の 2 倍の和である」というレモワーヌの予想, さらに「4 以上の偶数は 2 個の幸運数の和として表せる」という問題もある。これ以外に類似の概念をもつ数の予想が立てられないだろうか。

マルコフ数の問題：$x^2+y^2+z^2=3xyz$ の整数解をマルコフ数という。マルコフの 3 つ組 $(a,b,c)\}$ は必ず 3 つの相異なる整数からなる。与えられたマルコフ数cに対して、c が最大要素であるようなマルコフの 3 つ組が一意に定まるか。

【現状】 マルコフ数は二分木上に配置することが可能である。
$\{F_n\}$をフィボナッチ数列とするとき，$(1,F_{2n-1},F_{2n+1})$のマフコフの組は無限に存在する。
$\{P_n\}$をペル数列とするとき，$(2,P_{2n-1},P_{2n+1})$のマフコフの組は無限に存在する。
n 番目のマルコフ数の近似式が発見されている。(Don B. Zagier, 1979 年)
n 番目のマルコフ数とn 番目のラグランジュ数の関係式が発見されている。

【鑑賞】



二分木上に配置されたマルコフ数（Wikipedia より）

【問いかけ】
（1）マルコフ数を面白く見せる新たな鑑賞法は考えられないものか。
（2）$x^2+y^2+z^2=3xyz$を拡張してこのマルコフ数を一般化できないか。

友愛数の問題：異なる 2 つの自然数の組で，自分自身を除いた約数の和が，互いに他方と等しくなるような数（友愛数）は，無限に存在するか。また，偶数と奇数からなる友愛数の組は存在するか。

【現状】 友愛数を求めることができる可能性のある関係式（サービト・イブン＝クッラの法則，オイラーの法則）などが発見されている。

【鑑賞】

友愛数の組を小さい順に列記すると
(220, 284), (1184, 1210), (2620, 2924), (5020, 5564), (6232, 6368), (10744, 10856), (12285, 14595), (17296, 18416), (63020, 76084), (66928, 66992), …
（オンライン整数列大辞典の数列 A063990）

【問いかけ】

（１）友愛数のグラフから何か見えてこないか。
（２）友愛数，社交数，婚約数などは同じタイプの数である。このようなタイプの数を総合的に考えて，自然数を分類することはできないか。

カレン素数の問題：$C_n = n2^n + 1$のタイプの素数C_nをカレン素数という。カレン素数は，無限に存在するか。また，pを素数としたときのカレン素数C_pは存在するか。

【現状】カレン素数は１６個しか見つかっていない。また，カレン素数C_pは見つかっていない。

【鑑賞】カレン素数のリストは以下である。
$C_1, C_{141}, C_{4713}, C_{5795}$，$C_{6611}$，$C_{18496}, C_{32292}$，$C_{32469}$，$C_{59656}$，$C_{90825}$，$C_{262419}$，$C_{361275}$，$C_{481899}$，$C_{1354828}$，$C_{6328548}$，$C_{6679881}$

【問いかけ】
（１）$G_n^b = nb^n + 1$を一般カレン数というが，何故この定義となっているか考えてみることはどうだろう。
（２）素数 $669 \cdot 2^{128454} + 1 = G_{42816}^8$ である。これによりあらたなテーマは生まれないか。

回文素数の問題：回文素数は，無限に存在するか。

【現状】 2014 年 3 月に，David Broadhurst により，現在の最大の回文素数（320,237桁）が見つかっており，

$$10^{320236}+10^{160118}+(137\times 10^{160119}+731\times 10^{159275})\times\frac{(10^{843}-1)}{999}+1$$

である。

【鑑賞】 回文素数の最初の数は以下である。

2, 3, 5, 7, 11, 101, 131, 151, 181, 191, 313, 353, 373, 383, 727, 757, 787, 797, 919, 929

また，G. L. Honaker, Jr によって，以下の回文素数ピラミッドも発見されている。

2
30203
133020331
1713302033171
12171330203317121
151217133020331712151
1815121713302033171215181
16181512171330203317121518161
331618151217133020331712151816133
9333161815121713302033171215181613339
11933316181512171330203317121518161333911

【問いかけ】

（１）回文素数ピラミッドとは異なる別の構造はないのだろうか。

（２）strobogrammatic prime は 6918169 という反転型の素数である。また，レピユニット素数 1,11,111,1111 なども研究されている。これをヒントに新たなる素数研究のアイディアは考えられないか。

フィボナッチ素数の問題：フィボナッチ素数は，無限に存在するか。

【現状】 2014 年に可能性のある最大のフィボナッチ素数が Henri Lifchitz によって発見され，それは，

$$F_{2904353}$$

で，606,974 桁である。

【鑑賞】 現在のフィボナッチ素数F_nは，

$$n = 3, 4, 5, 7, 11, 13, 17, 23, 29, 43, 47, 83, 131, 137, 359, 431, 433, 449, 509, 569, 571, 2971, 4723, 5387, 9311, 9677, 14431, 25561, 30757, 35999, 81839, 104911$$

である。このリストの$n = 4$を除く全てのインデックスが素数である。

フィボナッチ双子素数は以下である。

$$(F_5, F_7), (F_{11}, F_{13}),\ (F_{431}, F_{433}),\ (F_{569}, F_{571})$$

π_nをF_nの異なる因数の個数としたときの表は以下である。

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34
π_n	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2

n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
F_n	55	89	144	233	377	610	987	1597	2584	41810
π_n	2	1	2	1	2	3	3	1	3	2

【問いかけ】

（１）Wall-Sum-Sum primes というものや Fibonacci primitive part と言われるものがあるので，このようなものも調べて鑑賞してみたらどうだろう。

（２）上の鑑賞とその他の鑑賞から，一般フボナッチ素数を定義して研究してみたらどうだろうか。

フェルマー数の問題：フェルマー数($F_n = 2^{2^n} + 1$)は，$n \geq 6$のとき素数なのか合成数なのか。また，フェルマー数は平方因子を持つか。

【現状】フェルマー数F_nのリスト

$$F_0 = 3,\quad F_1 = 5,\quad F_2 = 17,\ F_3 = 257,\ F_4 = 65537$$

$$F_5 = 4294967297 = 641 \times 6700417$$

フェルマー数F_nが素数であるための必要十分条件は,

$$3^{(F_n-1)/2} \equiv -1 \mod F_n$$

である(Pepin)。また，F_nの因数は$k2^{n+1}+1$のタイプとなる(Euler)。

【鑑賞】フェルマー数の漸化式

$$F_n = (F_{n-1} - 1)^2 + 1$$

$$F_n = F_{n-1} + 2^{2^{n-1}} F_0 F_1 \cdots F_{n-2}$$

$$F_n = (F_{n-1})^2 - 2(F_{n-2-1})^2$$

$$F_n = F_0 \cdots F_{n-1} + 2$$

正n角形でnを素因数分解したときに奇数因子が全てフェルマー素数のどれかであり，なおかつ同じフェルマー素数が 2 つ以上存在しない場合のみ，作図可能である(Gauss)。つまり，

$$n = 2^k F_{a_1} F_{a_2} \cdots F_{a_r}$$

で，F_{a_1}，F_{a_2}，…，F_{a_r}は全て異なるフェルマー数である。

【問いかけ】

（１）フェルマーの漸化式を利用して，新たな数列の研究はできないか。

（２）一般フェルマー数なるものを定義して，同じようなことが言えないか。

６次以上の魔方陣の総数の問題：３方陣は１個，４方陣は 880 個，５方陣は 275,395,224 個あることが分かっている。$n \geq 6$のときのn魔方陣の総数はいくつか。

【現状】n魔方陣の各列の和は

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n^2} k = \frac{n(n^2+1)}{2}$$

である。

６次の魔方陣の数は約 1,800 京あるといわれている。その中で特殊な 6-4 同心方陣という魔方陣は 7,736,347,893,760 個ある。また，６次の完全方陣は存在しない。より一般に$4n+2$次の完全方陣も存在しない。

【鑑賞】完全方陣

$$\begin{bmatrix} 6 & 12 & 7 & 9 \\ 15 & 1 & 14 & 4 \\ 10 & 8 & 11 & 5 \\ 3 & 13 & 2 & 16 \end{bmatrix}$$

5-3 同心方陣

$$\begin{bmatrix} 1 & 23 & 16 & 4 & 21 \\ 15 & 14 & 7 & 18 & 11 \\ 24 & 17 & 13 & 9 & 2 \\ 20 & 8 & 19 & 12 & 6 \\ 5 & 3 & 10 & 22 & 25 \end{bmatrix}$$

偶数・奇数分離方陣

$$\begin{bmatrix} 14 & 10 & 1 & 22 & 18 \\ 20 & 11 & 7 & 3 & 24 \\ 21 & 17 & 13 & 9 & 5 \\ 2 & 23 & 19 & 15 & 6 \\ 8 & 4 & 25 & 16 & 12 \end{bmatrix}$$

ラテン方陣から魔方陣へ

$$\begin{bmatrix} (0,0) & (1,1) & (2,2) \\ (1,2) & (2,0) & (0,1) \\ (2,1) & (0,2) & (1,0) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 11 & 22 \\ 12 & 20 & 1 \\ 21 & 2 & 10 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 5 & 6 & 1 \\ 7 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

【問いかけ】

（１）対称性という観点から魔方陣を研究はできないか。

（２）従来の魔方陣のルールを少し変えて，新しいルールでの概魔方陣なるものを考え，研究できないか。

シェルピンスキー数の問題：78557 より小さなシェルピンスキー数は存在するか。

【現状】 シェルピンスキー数とは，全ての自然数nに対して，$k \times 2^n + 1$が合成数となる正の奇数kのことを指す。

$$S_n = 78557 \times 2^n + 1$$

は常に合成数である。(1962 年, John Selfridge)

【鑑賞】 シェルピンスキー数

$$S_n = 78557 \times 2^n + 1$$

リーゼル数

$$R_n = 509203 \times 2^n - 1$$

ブリエ数

$$B_n = 3316923598096294713661 \times 2^n \pm 1$$

【問いかけ】

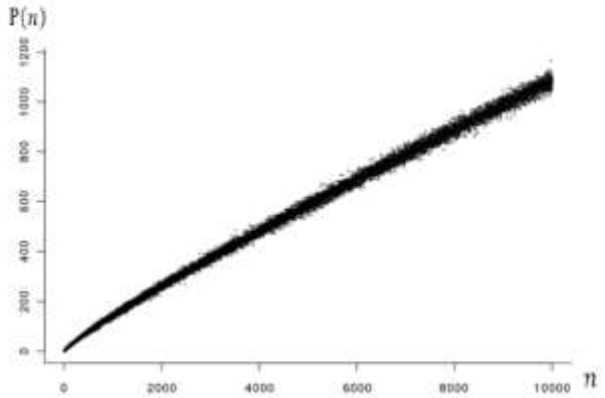
（１）シェルピンスキー数とメルセンヌ素数の関係について研究はできないか。

（２）シェルピンスキー数とメルセンヌ素数の関係が見つかったなら，シェルピンスキー数とメルセンヌ素数を一般的な立場から研究はできないか。

ルジャンドルの問題：任意の自然数nについて，n^2と$(n+1)^2$の間には必ず素数が存在するか。

【現状】n^2と$(n+1)^2$の間には必ず素数か半素数が存在する。(1975 年，陳景潤)
nが十分大きいとき，n^3と$(n+1)^3$の間には必ず素数が存在する。(Albert Ingham)
4×10^{18}までの自然数に対して正しいことが確かめられている。

【鑑賞】Number P(n) of primes between n^2 and $(n+1)^2$.
0, 2, 2, 2, 3, 2, 4, 3, 4, 3, 5, 4, 5, 5, 4, 6, 7, 5, 6, 6, 7, 7, 7, 6, 9, 8, 7, 8, 9, 8, 8, 10, 9, 10, 9, 10, 9, 9, 12, 11, 12, 11, 9, 12, 11, 13, 10, 13, 15, 10, 11, 15, 16, 12, 13, 11, 12, 17, 13, 16, 16, 13, 17, 15, 14, 16, 15, 15, 17, 13, 21, 15, 15, 17, 17, 18, 22, 14, 18, 23, 13



【問いかけ】

（1）素数定理とルジャンドルの問題を比較してみよう。

（2）ガウス整数で類似の問題は考えられないか。

（3）素数ではなく，その他の面白そうな数の分布について議論できないか。