[1] ネーピアの数 e の値を小数第5位までかけ。

$$e = 2.71828$$

[2] オイラーの公式をかけ。

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

[3] オイラーの公式を使って次の加法定理

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

を証明せよ。

$e^{i(\alpha+\beta)} = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta) \cdots ①$

一方 $e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha}\cdot e^{i\beta}$

$= (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta)$

$= (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + i(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) \cdots ②$

①②より
$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$.

[4] $\cos\frac{\pi}{12}$ の正確な値を求めよ。

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ で $\alpha = \frac{\pi}{12}$ とおくと

$\cos\frac{\pi}{6} = 2\cos^2\frac{\pi}{12} - 1$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\cos^2\frac{\pi}{12} - 1$

$\Rightarrow \cos^2\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{4}$

$\therefore \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{\sqrt{3}+1}}{2}$

[5] 公式 $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$ を使って，$\cos 10^\circ\cos 50^\circ\cos 70^\circ$ の値を求めよ。

$\cos 70^\circ\cos 50^\circ\cos 10^\circ$

$= \frac{1}{2}\{\cos 120^\circ + \cos 20^\circ\}\cos 10^\circ$

$= \frac{1}{2}\{-\frac{1}{2} + \cos 20^\circ\}\cos 10^\circ$

$= -\frac{1}{4}\cos 10^\circ + \frac{1}{2}\cos 20^\circ\cos 10^\circ$

$= -\frac{1}{4}\cos 10^\circ + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\{\cos 30^\circ + \cos 10^\circ\}\right]$

$= -\frac{1}{4}\cos 10^\circ + \frac{1}{4}\cos 30^\circ + \frac{1}{4}\cos 10^\circ$

$= \frac{1}{4}\cos 30^\circ$

$= \frac{\sqrt{3}}{8}$

[6] 関数 $y = -\sqrt{3}\sin x + \cos x$ のグラフを，$y = \sin x$ のグラフを基準に言葉で説明せよ。

$a = -\sqrt{3},\ b = 1 \Rightarrow \sqrt{a^2+b^2} = 2$.

$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{-\sqrt{3}}{2},\ \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{5}{6}\pi$

よって $y = -\sqrt{3}\sin x + \cos x = 2\sin(x + \frac{5}{6}\pi)$ のグラフは
$y = \sin x$ のグラフを y 方向へ2倍，x 方向へ $-\frac{5}{6}\pi$
平行移動したもので，周期 2π.

[5] 次の分数式を部分分数にせよ。

(1) $\frac{1}{k(k+2)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+2}$ とおく

$A = \left.\frac{1}{k+2}\right|_{k=0} = \frac{1}{2},\ B = \left.\frac{1}{k}\right|_{k=-2} = -\frac{1}{2}$

よって $\frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right)$

(2) $\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$

$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1} + \frac{C}{k+2}$ とおく

$A = \left.\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right|_{k=0} = \frac{1}{2},\ B = \left.\frac{1}{k(k+2)}\right|_{k=-1} = -1,\ C = \left.\frac{1}{k(k+1)}\right|_{k=-2} = -\frac{1}{2}$

よって $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2(k+2)}$

[6] $a_{k+1} = 3a_k\ (a_1 = 2)$ を漸化式という。

これにより，$a_2 = 3a_1 = 3\times 2 = 6,\quad a_3 = 3a_2 = 3\times 6 = 18,$
$a_4 = 3a_3 = 3\times 18 = 54$ というように，$a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots$ の値を次々に求めることができる。以下の漸化式の，a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 を求めよ。

(1) $a_{k+1} = 5a_k + 1\ (a_1 = -1)$

$(k=1)\ a_2 = 5a_1 + 1 = 5\times(-1)+1 = -4$

$(k=2)\ a_3 = 5a_2 + 1 = 5\times(-4)+1 = -19$

$(k=3)\ a_4 = 5a_3 + 1 = 5\times(-19)+1 = -94$

$(k=4)\ a_5 = 5a_4 + 1 = 5\times(-94)+1 = -469$

(2) $a_{k+1} = 2a_k + k\ (a_1 = 1)$

$(k=1)\ a_2 = 2a_1 + 1 = 2\times 1 + 1 = 3$

$(k=2)\ a_3 = 2a_2 + 2 = 2\times 3 + 2 = 8$

$(k=3)\ a_4 = 2a_3 + 3 = 2\times 8 + 3 = 19$

$(k=4)\ a_5 = 2a_4 + 4 = 2\times 19 + 4 = 42$

(3) $a_{k+2} = a_{k+1} + a_k\ (a_1 = 1, a_2 = 1)$

$(k=1)\ a_3 = a_1 + a_2 = 1 + 1 = 2$

$(k=2)\ a_4 = a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3$

$(k=3)\ a_5 = a_4 + a_3 = 3 + 2 = 5$.