ヘロンの公式の証明

ヘロンの公式　　三辺a,b,cが与えられた$\triangle \mathrm{ABC}$の面積Sは，

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

である。ただし，$p=\dfrac{a+b+c}{2}$

（証明）

2辺b,cとその間の角Aが与えられたとき，$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A$であった。

$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}$であるが，余弦定理より，$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$を考えると，

$$\sin A=\sqrt{1-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2}=\frac{4b^2c^2-\left(b^2+c^2-a^2\right)^2}{2bc}$$

である。

$$\begin{aligned}4b^2c^2-\left(b^2+c^2-a^2\right)^2&=\left(2bc+b^2+c^2-a^2\right)\left(2bc-b^2-c^2+a^2\right)\\&=\left\{(b+c)^2-a^2\right\}\left\{a^2-(b+c)^2\right\}\\&=(b+c+a)(b+c-a)(a-b+c)(a+b-c)\\&=2p(2p-2a)(2p-2b)(2p-2c)\\&=16p(p-a)(p-b)(p-c)\end{aligned}$$

であるから，$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A$に代入して，$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$を得る。

（証明終）