2021 年 5 月 6 日

推論・予測と数学教育

松田 修（津山高専）

１．推論・予測と数学教育

AI の目標は，人間との対話ができるソフトウェアを実現することと考えられている．それでは，対話とは何か．この問いに対し，対話は予測という思考と対になって現れる行動と考えることができる．しかも人間が対話で行っている予測は非常に複雑である．それゆえ，対話型のＡＩを実現することが現時点では非常に難しいとされている．なぜならば，大量のデータベースと深層学習を要するからである．

人が行う“予測する”という思考は，人間にとってとても重要な行動である．なぜならば我々は常に次に起こることを予測しながら生活しているからである．また，予測から“新しい発想”へと繋がることもある．教育が次の世代の新しい発想を生むための訓練という役割を担っているのであれば，教師が“推論・予測の訓練”を強く意識して授業や演習を行う態度は大きな意味をもつと考える．そしてこのことをサポートするために，“推論・予測の訓練を強く意識できる教育教材”が重要であると主張したい．

２．数学教育の一目的

数学教育は，様々な分野の基礎となっていると直感され重要視されている．数学で教えている内容を振り返ると，ノーテーションとその意味を教え，その後，その使い方を練習させる．しかし，大人になって，大抵の人がほとんど使わなくなるであろう数学の扱い方を練習していることもある意味事実である．数学を学ぶ目的は，一体何なのだろうか．

ベイズ統計学の考え方は，事前確率と現時点での観測結果（尤度）から，次に起こるであろう事後確率を求めることである．そして事後確率は予測というワードと結びつく．この考え方は，数学教育の目的は何かという問いを考える一つのヒントになると思われる．

３．推論・予測への関心を高める

数学で扱う練習問題に取り組む態度について考える．これをベイズの定理の立場からみると，その問題に関係する予備知識が事前確率であり，その問題で示されている条件が尤度と対応する．それらを元に解に繋がる公式や定理を予測し，解を求める作業を行うのである．例えば，三角形 ABC において，２辺の長さとその間の角が与えられたとき，残りの１辺の長さを求める問題の解を得るまでのプロセスでは，余弦定理を予測することができるかが問われている．すなわち，余弦定理が予測されれば解を求めるというゴールが非常に近づくのである．しかし，三角比を理解していれば，余弦定理を使わずとも三平方の定理を使うという予測から解を得ることもできる．その予測から補助線を１本引いて直角三角形を作る行動が得られる．

“推論・予測の訓練”が意識された教育教材開発とは何だろう．それは練習問題を単に解を求めることを要求するのではなく，解に辿り着くための試行錯誤を楽しませる教材と考える．すなわちそのような方法もあったのかという関心を起こさせる工夫がなされた教材である．したがって，三角形 ABC において，２辺の長さとその間の角が与えられたとき，残りの１辺の長さを求める問題の解法を，例えば２通りの

方法を示せと問うだけで，予測への関心は高まるはずである．その際，計算ミスへのストレスをなるべく軽減するために電卓やコンピュータを使うことを許可することは必要である．

４．推論・予測の教材例（因数分解）

中学時代において，２次式の因数分解は図形と結びつけて学習する．そのような経験を活かして因数分解が様々な数学的問題と関連することを想像させる例題や練習問題の作成を研究する．

（例１）タテの長さがxでヨコの長さが$2x+m$の長方形の壁がある．この壁に一辺の長さが1の正方形のタイルをn個並べて張る．以下の問いに答えよ．

（1）$n=6$のときの整数mをすべて求めよ．

（2）$n=5m$となる正の整数mをすべて求めよ．

（3）pを素数とするとき$n=pm$を満たすxの個数を予想せよ．

（例２）３つの整数$a<b<c$と$x=a^2bc-3a^3+1$を考える．

（1）$a=1, b=2, c=3$のときxの値を求めよ．

（2）$a=-3, b=-2, c=-1$のときxの値を求めよ．

（3）xが平方数となる$a<b<c$の条件を予測せよ．

5．推論・予測の教材例（関数のグラフ）

数のデータが与えられたとき，それを推論や予測に結びつけるためには，グラフを描いて考えることが効率的である．

（例３） 以下のデータはある関数$y=f_j(x)$の値である．$f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x)$を全て予測せよ．ただし小数表示は近似値である．

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f_1(x)$	0	1	1.585	2	2.322	2.585	2.807	3	3.170
$f_2(x)$	-43	-25	-11	-1	5	7	5	-1	-11
$f_3(x)$	-11	-9	-7	-5	-3	-1	1	3	5
$f_4(x)$	0.012	0.037	0.111	0.333	1	3	9	27	81

6．推論・予測の教材例（数列とベクトル）

数列が与えられたとき，その漸化式を予測する例題および，ベクトル列が与えられたときその変換行列を予測する例題や練習問題の作成を研究する．

（例４）次の数列a_nの漸化式を予測せよ．

$$1,\ 1,\ 2,\ 4,\ 6,\ 10,\ 14,\ 26,\ \cdots$$

（例５）次のベクトル$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$から$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$への線形変換を予測せよ．

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 12 \\ 18 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 24 \\ -54 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 48 \\ 162 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 96 \\ -486 \end{pmatrix},\ \cdots$$

（例６）次のベクトル$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$から$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$への線形変換を予測せよ．

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -26 \\ 19 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 97 \\ -71 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -362 \\ 265 \end{pmatrix},\ \cdots$$

7．推論・予測の教材例（微分積分）

関数$y=f(x)$のグラフの接線の傾きは関数を微分する$y'=f'(x)$ことで得られる．この原理をイメージできる教材として，具体的な問題の解を予測しながら求めていく例題や練習問題を研究する．

（例７）以下のデータは，ある関数$y=f(x)$の導関数$y'=ax^2+bx+c$のデータである．ただし，a,b,cは定数である．以下の問いに答えよ．

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f'(x)$	-30	-16	-6	0	2	0	-6

(1)　a,b,cを求めよ．
(2)　関数$y=f(x)$のグラフの増加区間を予測せよ．
(3)　関数$y=f(x)$のグラフの減少区間を予測せよ．
(4)　関数$y=f(x)$の極値となるxを予測せよ．
(5)　関数$y=f(x)$のグラフが点$(-1,0)$を通るとき．関数$y=f(x)$の式を予測せよ．

（例８）以下のデータは，ある関数$y=f(x)$の導関数$y'=\frac{ax+b}{cx+d}$のデータである．ただし，a,b,c,dを定数であり，表中のマーク!は値が発散して定まらない状態を表す．以下の問いに答えよ．

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f'(x)$	0.5	0	-1	-4	!	8	5

(1)　a,b,c,dを求めよ．
(2)　関数$y=f(x)$のグラフの増加区間を予測せよ．
(3)　関数$y=f(x)$のグラフの減少区間を予測せよ．
(4)　関数$y=f(x)$の極値となるxを予測せよ．
(5)　関数$y=f(x)$のグラフが点$(0,1)$を通るとき．関数$y=f(x)$の式を予測せよ．

8．推論・予測の教材例（剰余の計算）

剰余の計算の特に合成数で割った余りの計算では，データを準備しそれを検討してから予測という作業に入ることができる．

（例９）23^{23}を 26 で割った余りを求めよ．

（例１０）29^{28^5}を 36 で割った余りを求めよ．

9．推論・予測の教材例（ベイズの定理）

ベイズ統計学は，ベイズの定理をもとに事前の情報から次の将来を予測する一つの方法を与えるものである．ベイズの定理から推定法をイメージできる例題や練習問題を研究する．

（例１１）袋の中には黒玉と赤玉が合計 5 個入っている．以下の問いに答えよ．

（１）袋の中に黒玉が入っている確率分布を予測せよ．

黒玉の個数	0	1	2	3	4	5
黒玉の確率						

（２）袋の中から玉を 1 個取り出したら黒玉であった．袋の中に黒玉が入っている確率分布を予測せよ．

黒玉の個数	0	1	2	3	4	5
黒玉の確率						

（３）残りの玉が 4 個入っている袋の中から玉を 1 個取り出したらまた黒玉であった．袋の中に黒玉が入っている確率分布を予測せよ．

黒玉の個数	0	1	2	3	4	5
黒玉の確率						

（４）残りの玉が 3 個入っている袋の中から玉を 1 個取り出したら白玉であった．袋の中に黒玉が入っている確率分布を予測せよ．

黒玉の個数	0	1	2	3	4	5
黒玉の確率						