

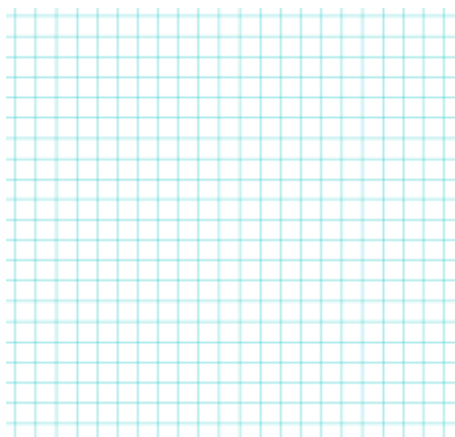
2019年7月31日

提案者：松田 修

問題. 以下は, M7.0 以上の地震に関するある地域データの一部で, M7.0 以上の地震発生後の時間 t で同規模以上の地震が起こった回数の相対度数 p を示したものである。

t	1	3	5	7	9	11	13
p	0.450	0.070	0.015	0.035	0.032	0.010	0.006
y							
$ p - y $							

(1) データ (t, p) のヒストグラムと近似曲線を描け。



(2) (t, p) はべき関数 $y = \frac{c}{t^k}$ に従うと考え, $|p - y| \leq 0.02$ となるように, c と k を決定し, y の欄を埋めよ。

(3) $y = \frac{c}{x^k}$ に従う分布 (t, p) は, パレート分布 $\text{Par}(a, b)$ であることを確かめ, a, b を小数点第2位まで決定せよ。また, このパレート分布 $\text{Par}(a, b)$ は平均 μ が確定しないことを示せ。

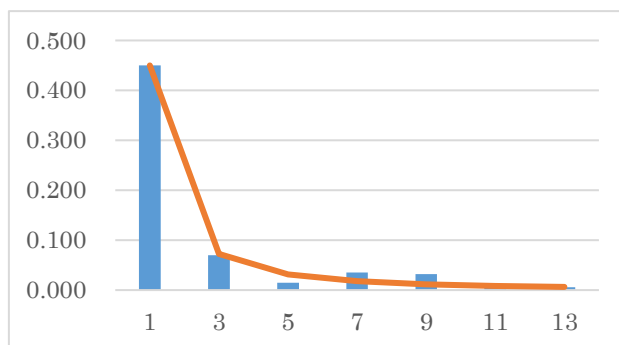
(4) (t, p) をパレート分布 $\text{Par}(a, b)$ と考え, 次を小数第3位まで計算せよ。

$$P(0.5 \leq X \leq 1.5), \quad P(7.5 \leq X \leq 8.5)$$

(5) パレート分布 $\text{Par}(a, b)$ を用いて, $P(b \leq X \leq r) = 0.8$ である r を推定せよ。

解答例

(1)



(2) $(x, y) = (1, 0.36), (3, 0.07)$ を用いて、連立方程式 $0.45 \times 1^k = C$, $0.07 \times 3^k = C$ を得る。これより、 $C = 0.45$, $k = \log_3 \frac{0.45}{0.07} \sim 1.69$ となる。しかし、 $x = 9$ で $|p - y| > 0.02$ である。 $k = 1.66$ とすると $|p - y| \leq 0.02$ となる。よって、 $y = \frac{0.45}{x^{1.66}}$ と推測する。

t	1	3	5	7	9	11	13
p	0.450	0.070	0.015	0.035	0.032	0.010	0.006
y	0.450	0.073	0.031	0.018	0.012	0.008	0.006
p - y	0.000	0.003	0.016	0.017	0.020	0.002	0.000

(3) $a + 1 = k = 1.66$, $ab^a = C = 0.45$ より、 $a = 0.66$, $b = \left(\frac{0.45}{0.66}\right)^{\frac{1}{0.66}} \sim 0.56$ である。よって、 $y = \frac{0.45}{x^{1.66}}$ はパレート分布 $\text{Par}(0.66, 0.56)$ である。

また、 $\mu = \int_b^\infty xy dx = 0.45 \int_{0.56}^\infty x^{-0.66} dx = \frac{0.45}{0.34} [x^{0.34}]_{0.56}^\infty$ より、 μ は確定しない。

$$(4) P(0.5 \leq X \leq 1.5) = 0.45 \int_{0.5}^{1.5} x^{-1.66} dx = \frac{0.45}{-0.66} [x^{-0.66}]_{0.5}^{1.5} = 0.56$$

$$P(7.5 \leq X \leq 8.5) = \frac{0.45}{-0.66} [x^{-0.66}]_{7.5}^{8.5} = 0.014$$

$$(5) \mu = \int_{0.56}^r \frac{0.45}{x^{1.66}} dx = \frac{0.45}{-0.66} [x^{-0.66}]_{0.56}^r = 0.8 \text{ より,}$$

$$r = \left(\frac{-0.66 \times 0.8}{0.45} + 0.56^{-0.66} \right)^{\frac{1}{-0.66}} = 6.43 \text{ 日}$$