数理・データサイエンス教材案（閉曲面のオイラー数）

2022 年 6 月 8 日

提案者：松田 修

球やn人乗りの浮き輪のような曲面を**閉曲面**と呼ぶ.

図 1

n人乗りの浮き輪の穴のことを**種数**（genus）といい，記号gで表す．特に球の種数は$g = 0$である．また，種数が$g = 1$である閉曲面は**トーラス**と呼ばれる.

以下，閉曲面のオイラー数を考えていく.

閉曲面のオイラー数Eも三角形分割を行い，面の数f，辺の数e，点の数vから

$$E = f - e + v$$

として得られる．このとき分割に使う三角形は，通常の三角形でなくて多少辺がゆがんでいるものでもよく，さらに平面図形のオイラー数と同様，三角形分割によらずオイラー数は定まることが知られている.

球の三角形分割を考える．そのためには，赤道を境に北半球を取り出しそれを２つに分けるものを考える．南半球も同様にする．このとき図２の右図のように半円を三角形として考える.

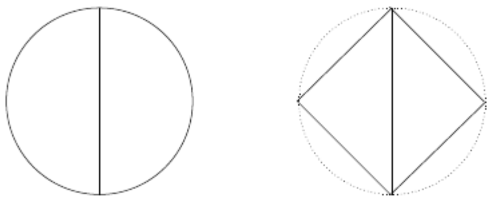

図２

このことから，$f = 4, v = 6, e = 4$が得られ，オイラー数は

$$E = f - e + v = 4 - 6 + 4 = 2$$

が得られる．しかし，球の北半球を四角形（または三角形）とみることで，北半球のオイラー数E_nは1，南半球のオイラー数E_sも1より，球のオイラー数Eは，$E = E_n + E_s = 2$と考えることもできる.

実は，オイラー数が2である閉曲面は，その曲面を伸ばしたり縮めたり捻ったりする（**連続変形**という）ことで，球（$g = 0$の閉曲面）に変形できることが証明されている.

注意！　連続変形には，切ったり貼ったりすることは含まれていない.

トーラスのオイラー数を考える．上半面と下半面に分ける．

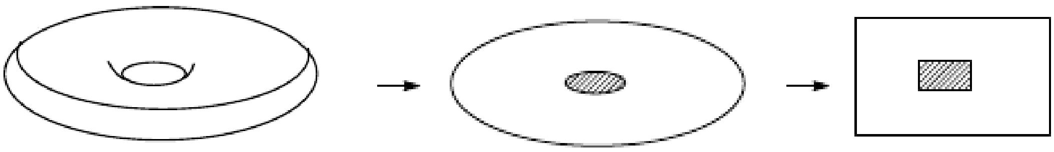

図３

上半面（穴付き円盤）は，連続変形して穴付き四角形に変形される．したがって，上半面のオイラー数E_uは，四角形のオイラー数から四角い穴のオイラー数を引けば得られるので，

$$E_u = 1 - 1 = 0$$

となる．同様にして，下半面のオイラー数$E_l = 0$を得る．よって，トーラスのオイラー数は

$$E = E_u + E_l = 0 + 0 = 0$$

となる．

以下，オイラー数に関する演習を行う．

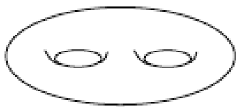

図４

問１．種数$g = 2$の閉曲面のオイラー数Eを求めよ．

問２．種数$g = 3$の閉曲面のオイラー数Eを求めよ．

問３．種数gの閉曲面のオイラー数Eを求める公式を予測せよ．

問４．図５と図６の閉曲面のオイラー数Eをそれぞれ求めよ．

図５

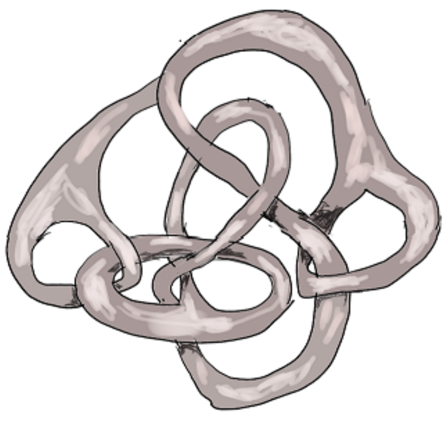

図６

解答

問１． $E=-2$

問２． $E=-4$

問３． $E=2-2g$

問４． 図５ $E=-2$，図６ $E=-4$

連続変形して図５は図７の$g=2$の閉曲面に，図６は図８の$g=3$の閉曲面になる．

図７

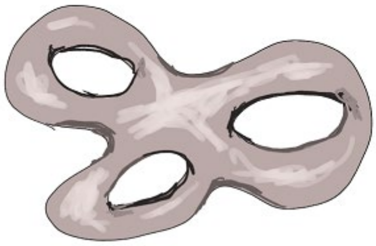

図８