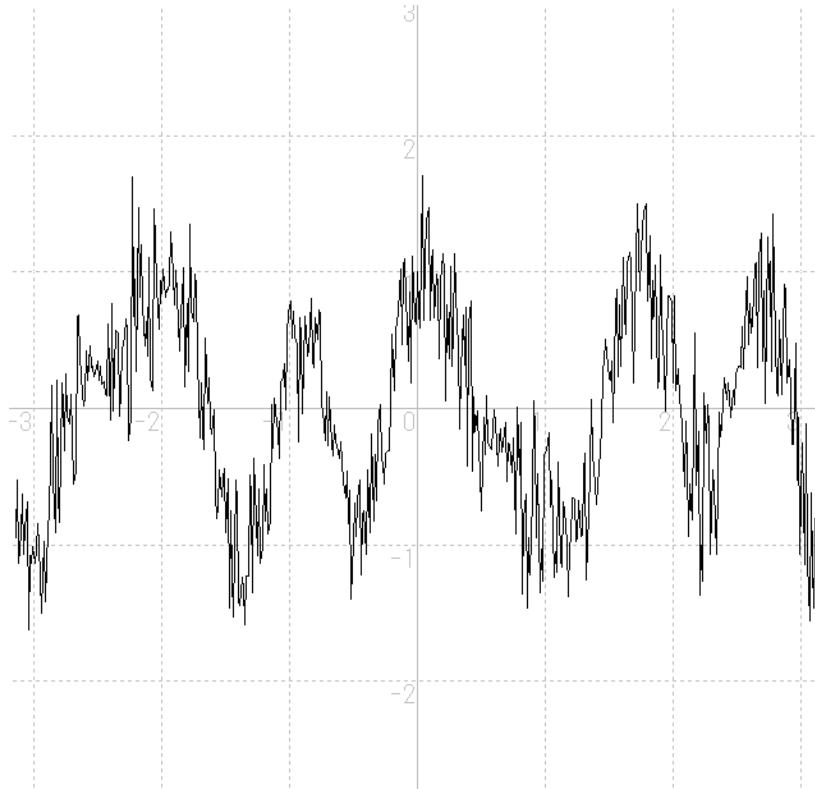


第13回

Excel でフーリエ解析 FFT

1. フーリエ解析

以下のグラフは、 $-\pi \leq x \leq \pi$ におけるある関数 $y = f(x)$ のグラフであり、このグラフは周期的に無限に繋がっているものとする。このグラフを分析する一つの方法が、**フーリエ解析**である。



フーリエ解析を簡単に説明する。

まず $f(x)$ をサインとコサインの三角関数で近似する。すなわち、

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + (a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots) + (b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \dots)$$

とする。右辺を $f(x)$ の**フーリエ級数**という。そして、 $a_0, a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$ を**フーリエ係数**という。これらは、

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

で求めることができる。

ここで、 $f(x)$ のフーリエ級数を考えたとき、フーリエ係数が最大なものが a_r であったとすると、 $f(x)$ には $\cos rx$ の要素が大きく含まれると考えることができる。

さて、オイラーの公式

$$e^{inx} = \cos nx + i \sin nx$$

を考え、

$$f(x) \sim c_0 + c_1 e^{ix} + c_2 e^{i2x} + c_3 e^{i3x} + \dots$$

と近似したものを、 $f(x)$ の複素フーリエ級数という。ここで、複素フーリエ係数 c_n は

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

で求めることができる。

さて、Excelで使えるフーリエ解析は、FFT（ファーストフーリエ変換）というものである。これは、複素フーリエ係数 c_n を周期的な離散的なデータから求める道具である。すなわち、 x の区間 $-\pi \leq x \leq \pi$ のグラフが周期性の元になるデータであり、その区間を 2^r で分割したデータを処理して c_n を求めるのである。すなわち、 $F(n) = c_n$ として、

$$F(n) = \frac{1}{2^r} \sum_{m=0}^{2^r-1} f(m) e^{-\frac{i2n\pi m}{2^r}}$$

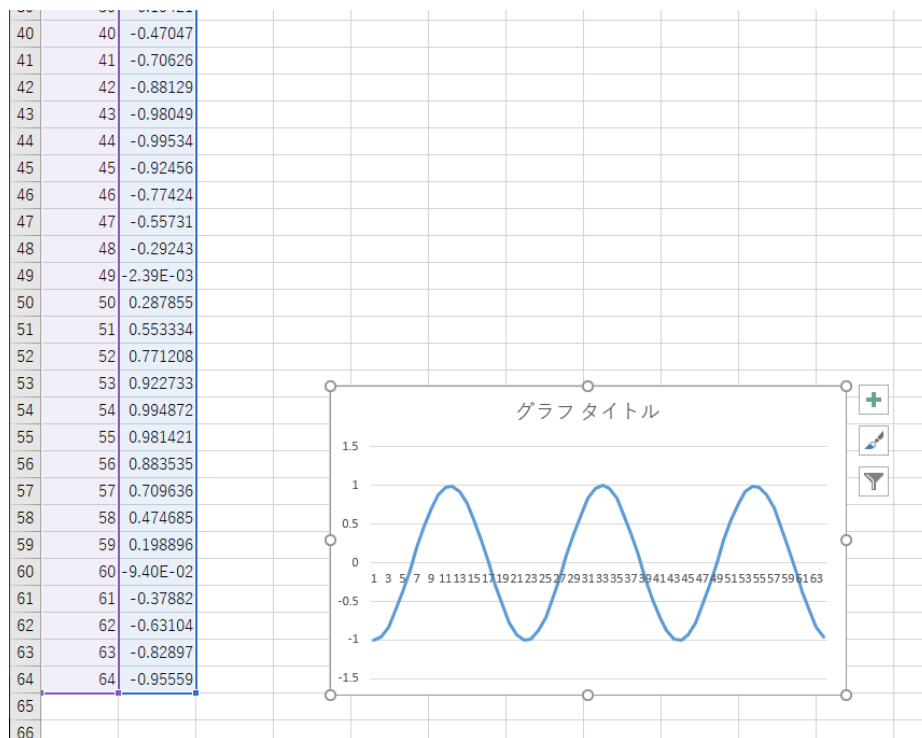
で求めるのである。このとき、 $F(n)$ は複素数となる。フーリエ解析で最も重視されている量がパワースペクトルと呼ばれるもので、 $F(n)$ の絶対値 $ABS(F(n))$ の2乗である。

2. Excel でフーリエ解析

Excelにおけるフーリエ解析 FFT のやり方を説明する。まず、扱う関数は $y = \cos 3x$ で $2^6 = 64$ 個のデータを解析する。「第13回_FFT_DATA (例1).CSV」にそのデータがある。

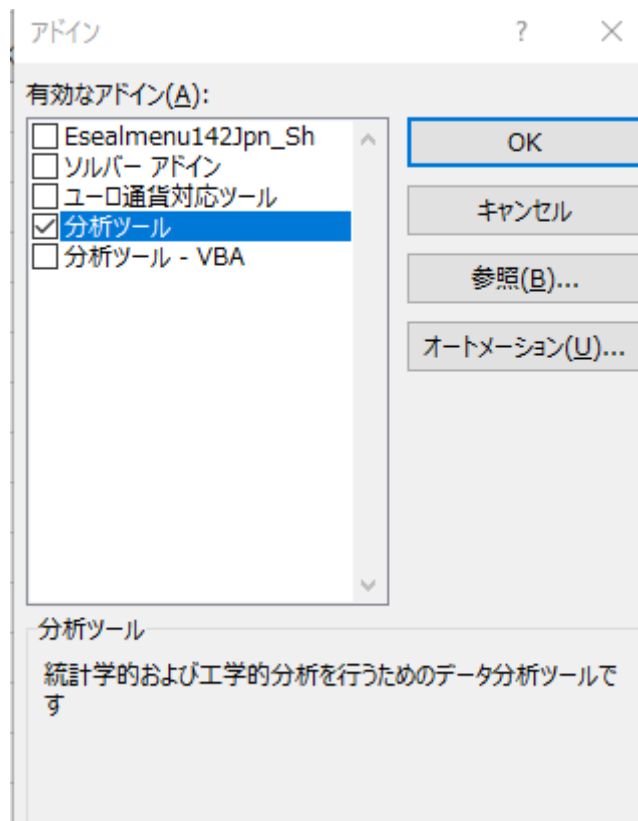
(1) データのグラフの確認

A1とB1にカーソルを合わせて、[SHIFT]+[Ctrl]+[↓]とすると、A1、B1からA64、B64までのセルが選択される。その後、「挿入」「おすすめグラフ」から適当なグラフを選択すると、 $y = \cos 3x$ のグラフが現れる。



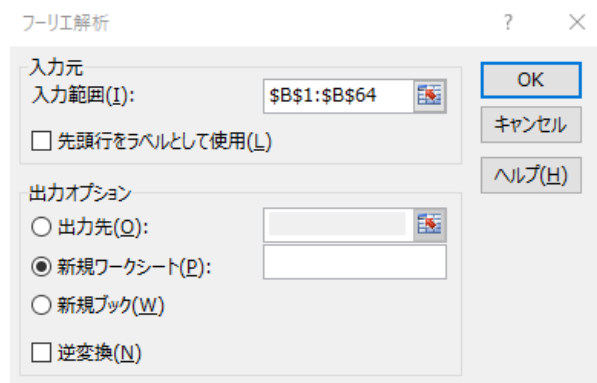
(2) フーリエ解析のための準備

「ファイル」、「オプション」「アドイン」の順に開いていき、「設定」ボタンを押して「分析ツール」をチェックする。その後、「データ」内に「データ分析」があることを確認する。



(3) データのフーリエ解析

「データ」内に「データ分析」をクリックし、「フーリエ解析」を選択し「OK」とする。新規ワークシートにチェックが入っていることを確認する。入力範囲を B1 とし[SHIFT]+[Ctrl]+[↓]の後、入力範囲が\$B\$1:\$B\$64であることを確認し「OK」とする。



(3) データのフーリエ解析つづき

Sheet1 の A 列に 64 個のフーリエ変換値 $F(n)$ が並んでいることを確認し、B1 に
 $=IMABS(A1)$

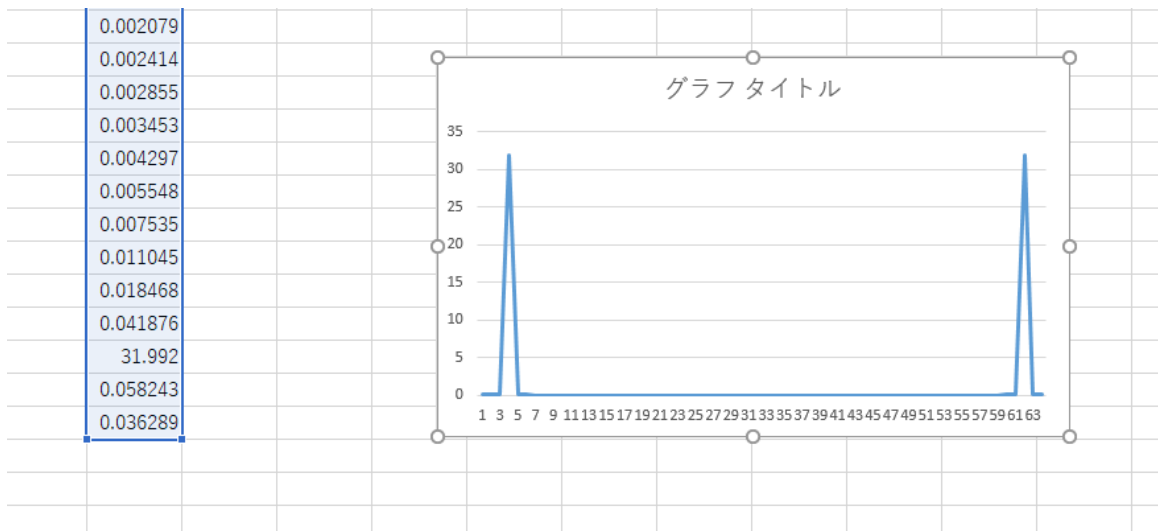
と入力する。それを B64 までドラッグしていく。IMABS(A1) は、A1 の複素数値を絶対値にする関数で、周波数の振幅を表すものである。したがって、B 列の数値を **振幅スペクトル** と呼ぶ。

	A	B	C
1	3.2226848635163E-002	0.032227	
2	3.62890680975673E-002	0.036289	
3	5.82431472523108E-002	0.058243	
4	-31.992000686518	31.992	
5	-4.18763641335861E-002	0.041876	
6	-1.84683777879649E-002	0.018468	
7	-1.10448253736964E-002	0.011045	
8	-7.53523185045067E-003	0.007535	
9	-5.5478553615851E-003		

B 列の左に列を挿入し、セル B1 に 0 を、セル B2 に 1 を代入し、B64 までドラッグする。

	A	B	C
1	3.2226848635163E-002	0	0.032227
2	3.62890680975673E-002	1	0.036289
3	5.82431472523108E-002	2	0.058243
4	-31.992000686518	3	31.992
5	-4.18763641335861E-002	4	0.041876
6	-1.84683777879649E-002	5	0.018468
7	-1.10448253736964E-002	6	0.011045
8	-7.53523185045067E-003	7	0.007535
9	-5.5478553615851E-003	8	0.005548
10	-4.29734082448335E-003	9	0.004297
11	-3.45349882466142E-003	10	0.003453
12	-2.85485612733717E-003	11	0.002855
13	-2.41386079915355E-003	12	0.002414
14	-2.07932042037162E-003	13	0.002079
15	-1.81952084626228E-003	14	0.00182
16	-1.61389388406054E-003	15	0.001614
17	-1.44859402719476E-003	16	0.001449
18	-1.3140092544214E-003	17	0.001314
19	-1.20329148784175E-003	18	0.001203

B1 と C1 にカーソルを合わせて、[SHIFT]+[Ctrl]+[↓]とすると、B1、C1 から B64、C64 までのセルが選択される。その後、「挿入」「おすすめグラフ」から適当なグラフを選択すると、FFT のパワースペクトルがグラフとして現れる。



パワースペクトルをより詳細に理解するために rank 関数を使う。セル D1 に以下を記入する。

=RANK(C1,\$C\$1:\$C\$64,0)

そのご、D64 までドラッグする。最後の 0 は昇べきの順に並べるという意味である。

	A	B	C	D
1	3.2226848635163E-002	0	0.032227	9
2	3.62890680975673E-002	1	0.036289	8
3	5.82431472523108E-002	2	0.058243	3
4	-31.992000686518	3	31.992	1
5	-4.18763641335861E-002	4	0.041876	5
6	-1.84683777879649E-002	5	0.018468	10
7	-1.10448253736964E-002	6	0.011045	13
8	-7.53523185045067E-003	7	0.007535	14
9	-5.5478553615851E-003	8	0.005548	16
10	-4.29734082448335E-003	9	0.004297	18
11	-3.45349882466142E-003	10	0.003453	21
12	-2.85485612733717E-003	11	0.002855	22
13	-2.41386079915355E-003	12	0.002414	24
14	-2.07932042037162E-003	13	0.002079	26

最後に、A,B,C,D の列を選択して、「データ」、「並べ替え」、「最優先されるキー」を列 D とし、「順序」を「昇順」にして「OK」とする。

	A	B	C	D	E
1	-31.992000686518	3	31.992	1	
2	-31.992000686518	61	31.992	1	
3	5.82431472523108E-002	2	0.058243	3	
4	5.82431472523108E-002	62	0.058243	3	
5	-4.18763641335861E-002	4	0.041876	5	
6	-4.18763641335861E-002	60	0.041876	5	
7	3.62890680975701E-002	63	0.036289	7	
8	3.62890680975673E-002	1	0.036289	8	
9	3.2226848635163E-002	0	0.032227	9	

これは、このデータには周波数 3 のデータが強く含まれている。ここで、対称性から $61 = 64 - 3$ で 61 の周波数は 3 とみる。よって、このデータは

$$y = \cos 3x \text{ または } y = \sin 3x$$

が強く含まれていると推測できるのである。

演習. 「第 13 回_FFT_DATA (例 2)」のデータのグラフを表示させ、その後、データをフーリエ解析（スペクトル解析）せよ。

本日の実験実習の課題

課題1.「第13回_FFT_DATA（演習1）」のデータのグラフを表示させ、その後、データをフーリエ解析（スペクトル解析）し、データの関数を予測せよ。

課題2.「第13回_FFT_DATA（演習2）」のデータのグラフを表示させ、その後、データをフーリエ解析（スペクトル解析）し、データの関数を予測せよ。

課題3.「第13回_FFT_DATA（演習3）」のデータのグラフを表示させ、その後、データをフーリエ解析（スペクトル解析）し、データの関数を予測せよ。

実験実習スキルの到達目標		
項目	スキル	到達目標
計画と実施	Excel でフーリエ解析（スペクトル解析）を行う	友人と話し合いながら Excel でフーリエ解析（スペクトル解析）を行うことができる。
機器・器具の操作	Excel のフーリエ解析（スペクトル解析）に関するコマンドの理解	Excel のフーリエ解析（スペクトル解析）に関するコマンドを適切に利用できる。
結果・分析・考察	実行結果の判定と数学的な考察	実行結果が適切な数値であるかどうか判定でき、フーリエ解析（スペクトル解析）の結果を報告できる。

実験実習報告書（第13回）

3-S 番号 () 名まえ ()	評 価		
	A	B	C

課題1.

課題2.

課題3.

3-S 番号（ ） なまえ（ ）

実験実習スキル評価（第13回）

項目	スキル	到達目標	レベル3相当				自己評価
			A	B	C	D	
計画と実施	Excel でフーリエ解析を行う	友人と話し合いながら Excel でフーリエ解析を行うことができる。	自力で Excel でフーリエ解析を行うことができる。	友人と話し合いながら Excel でフーリエ解析を行うことができる。	教員の助言を受けながら Excel でフーリエ解析を行うことができる。	教員の助言を受けても Excel でフーリエ解析を行うことができない。	
機器・器具の操作	Excel のフーリエ解析に関するコマンドの理解	Excel のフーリエ解析に関するコマンドを適切に利用できる。	Excel のフーリエ解析に関するコマンドを適切に利用できる。	Excel のフーリエ解析に関するコマンドをある程度適切に利用できる。	誰かの助言を受ければ, Excel のフーリエ解析に関するコマンドを適切に利用できる。	Excel のフーリエ解析に関するコマンドを利用できない。	
結果・分析・考察	実行結果の判定と数学的な考察	実行結果が適切な数値であるかどうか判定でき, それらのデータをもとに極限に関する数学的考察ができる。	自分自身で実行結果が適切な数値であるかどうか判定でき, それらのデータをもとに極限に関する数学的考察ができる。	友人と話し合いながら実行結果が適切な数値であるかどうか判定でき, それらのデータをもとに極限に関する数学的考察ができる。	教師の助言を受けながら実行結果が適切な数値であるかどうか判定でき, それらのデータをもとに極限に関する数学的考察ができる。	教師の助言を受けても実行結果が適切な数値であるかどうか判定できない, それらのデータをもとに極限に関する数学的考察もできない。	