NIT Tsuyama college　平成27年度　第三号　六月号　発行日　2015年6月3日

津山高専
一年団通信
文責：一学年主任　佐藤誠

無限の計算と自律，そして自由

かつて，カントというドイツの哲学者は言いました。「自律（Autonomie）の先に自由（Freiheit）がある」と。**私は，“自律”とは「勇気をもって計算する」ことと考えます。**単に計算することは，数字と演算に束縛された状態といえます。そこに勇気というスパイスを加えた主体的行動を“自律”と考えます。そしてその先にこそ“自由”があるのです。1737年に大数学者オイラーが行った勇気ある計算をご紹介しましょう。$1+x+x^2+x^3+\cdots$をSと置きます。そして，$S-xS$を計算します。$S-xS=(1+x+x^2+x^3+\cdots)-(x+x^2+x^3+\cdots)=1$ です。したがって，$S=1/(1-x)$，つまり，

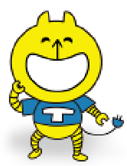
$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots$$

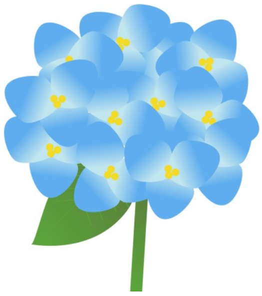
です。このxに1/2, 1/3, 1/5, 1/7, ・・という素数に関する分数を代入したものを，全て掛け合わせると，

$$\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\right)\left(\frac{1}{1-\frac{1}{5}}\right)\left(\frac{1}{1-\frac{1}{7}}\right)\cdots$$
$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{25}+\frac{1}{125}+\cdots\right)\cdots$$

となります。ここで，オイラーは，右辺を，勇気をもって計算しました。すると，

$$\text{右辺}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\cdots$$





となります。これは，

$$\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\right)\left(\frac{1}{1-\frac{1}{5}}\right)\left(\frac{1}{1-\frac{1}{7}}\right)\cdots=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\cdots$$

を意味し，素数と自然数が調和していることを表しています。実は，1350年ごろにフランスのオレームという数学者が$1+1/2+1/3+1/4+1/5+\cdots=\infty$ であることを証明していました。このことから，オイラーは，「素数は無限に存在する」という命題の新しい証明に成功したのでした。

では，オイラーの“自律”は，どのような“自由”を生んだのでしょうか？それは，オイラーが考えた

$$1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{6^s}+\frac{1}{7^s}+\cdots$$

というsを変数とする関数にあります。後にその格調高い“自由”に気づいたリーマンは，この関数をゼータ関数と名づけ$\zeta(s)$と表しました。勿論，オイラーは$\zeta(-1)$　を勇気もって果敢に計算しています。その結果が，もはや常識でもある有名な$\zeta(-1)=1+2+3+4+5+6+7+\cdots=-1/12$です。これを切っ掛けにゼータ関数から得られる無限級数の値が次々と判明しました。例えば，

$$\zeta(0)=1+1+1+\cdots=-\frac{1}{2},\ \zeta(-2)=1+2^2+3^2+\cdots=0,\ \zeta(-3)=1+2^3+3^3+\cdots=\frac{1}{120}$$

等々です。なんということでしょう！　そして，素数の構造を解明するリーマン予想$\zeta(1/2+ib)=0$ いう“自由”も生まれました。現在，ゼータ関数が持つ“自由”は，数学だけでなく，我々の宇宙の根源的な研究にも影響を与えるようになっています。ゼータ関数に興味を持った諸君には，岩波科学ライブラリーの「オイラー，リーマン，ラマヌジャン－時空を超えた数学者の接点－」（黒川信重 著）をお勧めします。ぜひ一度読んでみてください。

（1年3組副担任，数学担当，松田修）