

津山高専 一年団通信

平成26年度 第8号 発行日 2014.12.4
編集 一年団通信編集部 文責 一学年主任・佐藤誠

— 数学的創造とリーマン予想 —

紀元前200年頃、ユークリッドという人は、「素数は無限に存在する」ことを証明しました。一見、そんなの当たり前と思っても、しかしよく考えてみると、なかなかその証明法を思いつきません。たと思いついたとしてもそれが受け入れやすいものでないと、人を説得することができません。ユークリッドの証明は、素数が有限であると仮定したら矛盾するという背理法といわれる証明法を使った実にエレガントですばらしいものでした。そしてその証明は私たちに「素数は無限に存在する」ことを真に実感させてくれるのです。このような体験をすると、私たちは数学的創造に触れたことを感じずにはいられなくなります。

驚くべく数学的創造は、その2000年後の18世紀のスイスで起こりました。それはやはり素数に関する事件で、レオンハルト・オイラーという大数学者が起こしたものです。正確には1737年の事件で、素数の積と自然数の和に関する以下の関係式を世に示したものでした。

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{2}} \times \frac{1}{1-\frac{1}{3}} \times \frac{1}{1-\frac{1}{5}} \times \frac{1}{1-\frac{1}{7}} \times \frac{1}{1-\frac{1}{11}} \times \dots$$

この時、オイラーは、まず左辺が無限大になることを主張し、その結果、右辺から素数が無限にあることを示しました。これは、ユークリッドとは全く異なる方法です。それだけでなく、これに関係した尋常とはいえない

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots = -\frac{1}{12}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \dots = 0$$

などの“総和法”と呼ばれる無限級数の計算法を考え出し、素数研究に不可欠であると説明したのです。これ以外にもオイラーの研究は人を虜にするものが多く、それ以降、現代の数学的創造は、オイラーがやったような通常では考えられない、しかし意味ある数学的世界を人々に提示するものになっています。

さて、総和法的重要性は、素数に関する創造的活動を受け継いだドイツのベルンハルト・リーマンという大数学者によってより明らかにされました。リーマンは素数定理の啓示を受け、それを1859年11月にこの世に発表しました。それは素数の分布に関する定理で、それは、ゼータ関数の全ての虚の零点の理解が重要であることを示していました。つまり、ゼータ関数の全ての虚の零点がどういったものか分かれば、素数の分布が完全に分かるのです。ゼータ関数 $\zeta(s)$ とは、

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \dots$$

というもので、 s は複素数 $s = a + ib$ という変数です。リーマン

の計算でも $s = -1, -2$ のときのゼータ関数の値は $-1/12, 0$ となり、オイラーの主張は正しいものになりました。そして、大事件は1859年に起こりました。それが「ゼータ関数の全ての虚の零点は、 $s = \frac{1}{2} + ib$ という形になるはずだ」というリーマン予想の発表です。この時から、リーマン予想を解くことが我々人類の重要課題となったのです。20世紀に入り、ハーディー、グロンター、ディーク、ドリユージュ、セルバーグといった大天才達がリーマン予想の解決のために新しい数学的道具を次々と創造してきました。しかし夢はまだ実現していません。現在、リーマン予想は、クレイ数学研究所のミレニアム（100万ドル）懸賞問題の1つと

なっています。2006年にリーマン予想に並ぶポアンカレ予想が解決し、そう遠くない時期に、リーマン予想が解けるかもという噂も囁かれています。もしかすると私たちはその歴史の目撃者になれるのかもかもしれません。



レオンハルト・オイラー ベルンハルト・リーマン
野山由貴さん（平成24年度情報工学科卒）が描いてくれたオイラーとリーマン（物理から考える微積分入門、松田修著、電気書院より）

（1年2組副担任 松田修）

12月、1月の予定

- 12月4日（木）寮生入寮説明会
- 12月9日（火）一斉懇談日
- 12月17日（火）～24日（水）特別補習期間
- 12月24日（水）火曜日の補習
- 12月24日（水）閉寮（17:00）・閉寮点検
- 12月25日（木）～1月7日（水）冬季休業
- 1月7日（水）開寮（10:00）・開寮集会（15:00）
- 1月9日（金）水曜日の授業
- 1月15日（木）金曜日の授業
- 1月20日（火）～22日（木）寮生スポーツ大会
- 1月27日（火）一斉懇談日

津山高専1年生ウェブサイト：

<http://www.tsuyama-ct.ac.jp/ippan/index.htm>

ここからたどれます。本通信も掲載されています。