

第5章 機械工学編

機械工学を学ぶ皆さんにとって、学んだ原理や定理、現象を目で見て確かめたいと思ったことは多いのではないのでしょうか。本章では十進 BASIC を用いて、機械工学で学んだことを自宅のパソコンで簡単に調べる練習をしたいと思います。ここでは次の4テーマを取り上げます。機械工学の計算をする（調べてみる）基本パターンは同じですので、これらを応用して他の分野にも取り組んでみて下さい。

1. ピストンクランク機構（機構学・工業力学）
2. はり（材料力学）
3. ガスサイクル（熱力学）
4. 流れの数値シミュレーション（流体力学）

以下ではできるだけ難しい計算法を使わず、また工学式が見通しやすいプログラムにしてあります。ただし、十進 BASIC の基本は学んで頂いているものとしします。

5.1 ピストンクランク機構

機械の動きを知ることは、設計製作をする上でとても大切なことです。ここでは、簡単なリンク機構の一つであるスライダクランク機構（本節ではピストンクランク機構と呼びます）の動きを調べてみましょう。十進 BASIC

を使って、変位・速度・加速度線図を描画してみます。

5.1.1 変位・速度・加速度線図

図 5.1 に示すようなピストンクランク機構におけるピストン変位 x [m]・速度 v [m/s]・加速度 a [m/s²] は、それぞれ次の式により近似的に求められます [1],[2]。

$$x = r(1 - \cos \theta) + \frac{r}{4\lambda}(1 - \cos 2\theta) \quad (5.1)$$

$$v = \omega r \left(\sin \theta + \frac{\sin 2\theta}{2\lambda} \right) \quad (5.2)$$

$$a = \omega^2 r \left(\cos \theta + \frac{\cos 2\theta}{\lambda} \right) \quad (5.3)$$

$$(5.4)$$

ここで、 r [m] はクランク長さ、 θ [rad] は上死点からの回転角、 ω [rad/s] はクランクの角速度を表します。また、 λ は連かん比と呼ばれ、クランクと連接棒長さの比を表します。多くの場合には 3~5 程度の値をとります。

$$\lambda = \frac{l}{r}$$

また、ピストンの平均速度 v_{mean} [m/s] は次式で求められます。

$$v_{mean} = \frac{2SN}{60} = \frac{rN}{15} \quad (5.5)$$

S [m] はストローク ($=2a$)、 N [rpm] はクランク (エンジン) 回転数を表します。

これらの式を使って、変位・速度・加速度線図を描画し、平均速度とコンロッドに作用する最大慣性力を求めるプログラムを次に示します。

100 !---ピストンクランク機構

110 option angle degrees

120 !-変位表示用座標軸

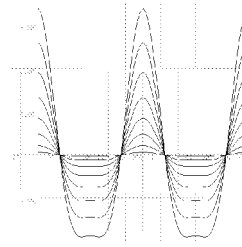
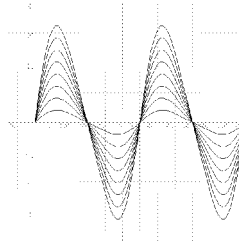
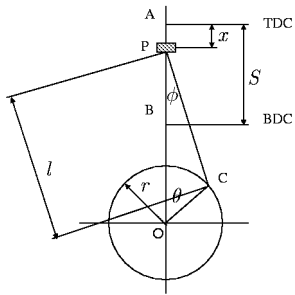


図 5.1: ピストンクランク機構 図 5.2: ピストン速度 図 5.3: ピストン加速度

```

130 !set window -90, 720, -0.005, 0.1
140 !draw grid(60, 0.01)
150 !-速度表示用座標軸
160 set window -90, 720, -40.0, 40.0
170 draw grid(60, 10.0)
180 !-加速度表示用座標軸
190 !set window -90, 720, -20000.0, 35000.0
200 !draw grid(60, 10000.0)
210
220 declare numeric s, l, r, lambda, n, m, omega, theta, ma_max
230
240 !-関数定義 (上死点からのピストン降下距離・速度・加速度)
250 def x(theta)=r*(1.0-cos(theta))+r/4.0/l lambda*(1.0-cos(2.0*theta))
260 def u(theta)=omega*r*(sin(theta)+sin(2.0*theta)/2.0/l lambda)
270 def a(theta)=omega^2*r*(cos(theta)+cos(2.0*theta)/l lambda)
280
290 !-データ入力
300 input prompt "ストローク [mm] を入力して下さい": s
310 input prompt "コンロッド中心間距離 [mm] を入力して下さい": l
320 input prompt "ピストン質量 [kg] を入力して下さい": m
330
340 let r=s/2.0/1000.0
350 let lambda=l/1000.0/r
360
370 !-グラフの描画
380 for n=1000 to 8000 step 1000

```

```

390 let ma_max=0.0
400 let omega=2.0*pi*n/60.0
410
420 for theta=0.0 to 720.0 step 10.0
430 ! plot lines: theta, x(theta);
440   plot lines: theta, u(theta);
450   ! plot lines: theta, a(theta);
460   if abs(m*a(theta))>ma_max then let ma_max=abs(m*a(theta))
470 next theta
480 plot lines
490
500 print "平均ピストン速度は", n*s/1000.0/30.0, "[m/s]"
510 print "最大慣性力は", ma_max/1000.0, "[kN]"
520 next n
530
540 end

```

表 5.1: 変数リスト

s	ストローク	入力値
l	コンロッド中心間距離	入力値
r	クランク長さ	入力値
lambda	連かん比	
n	エンジン回転数	
m	ピストン部質量	入力値
omega	角速度	
ma_max	加速度の最大値	

プログラムの説明 120行から200行では座標軸の設定を行っています。表示したいグラフによって適切なものを選択，他はコメントアウトして下さい。

220行は変数の宣言です。表5.1に変数一覧を示します。240行から270行は関数の定義です。5.1式から5.3式までの計算式を定義しています。

290 行から 320 行まではデータ入力部，340，350 行でクランク半径と連かん比を求めています。

380 行から 520 行はエンジン回転数に関するループです。各回転数において，420 から 480 行をメインループとし，各線図の描画，最大加速度の算出を行っています。ここでも，描画させたい関数を選んで他のものをコメントアウトして下さい。また，最大慣性力や平均速度の計算，表示も行っています。

例題 ピストン（ピストン，ピストンピン，ピストンリング，小端部キャップ等含む）質量が 0.41[kg]，ストロークが 75[mm]，コンロッド中心間距離が 130.5[mm]，最大出力を 6500[rpm] で発生するエンジンがあります。このエンジンのピストンクランク機構について，各線図を描画してみましょう。

プログラムに入力して速度・加速度線図を描画した結果を図 5.2 及び 5.3 に示します。計算式を見直してみると，三角関数部に一次と二次の成分があることがわかります。計算結果にもその様子が現れています。この影響は，連かん比によって変わってきます。連かん比が変わるように入力値を変えて，その様子確かめてみて下さい。

また，ピストン平均速度はこの場合，8000[rpm] まで計算すると 20[m/s] 程度まで変化するようです。最大出力のときはどうですか？大体 16～17[m/s] 程度の平均速度を持つようですね。

課題 1 図書館やインターネットを使えば（分解して計測してみても良いですね），身近なエンジンについて必要なデータを入手することができます（例えば [3]）。好みのエンジンについて計算，各線図を描画させましょう。また，いろんなエンジンのピストン平均速度について検討してみましょう。何か基準のようなものが見つかりませんか？

課題2 最大速度を持つクランク角度は、加速度がゼロになる位置として 5.3 式から解析的に求められます。一方、これらの式は近似式であり、正確な式は文献 [1],[2] に示されています。これらの場合について、速度最大となる角度を求める方法を考えてみてください。

5.2 はり

構造物や機械製品を構成する基本要素の一つに、はりがあります。片持ちはりや両端支持はりなどは、構造を支える重要な役割を担っています。ここでははりについて理解を深めるために、両端支持はりを対象とした計算を行ってみましょう。

5.2.1 断面二次モーメントと断面係数

はりの設計には、作用する最大曲げ応力を知ることが必要です。最大曲げ応力 σ_{max} [Pa] は、最大曲げモーメント M_{max} [N·m] と断面係数 Z [m³] から次式で計算できます [4],[5]。

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{Z} \quad (5.6)$$

したがって、最大曲げ応力を計算するためには、曲げ応力の分布と断面係数を求めなくてはなりません。また、断面係数は次式で求められます。

$$Z = \frac{I}{y_{max}} \quad (5.7)$$

ここで、 I [m⁴] は図形の断面二次モーメント、 y_{max} [m] は最大の端面距離です。そこで、まず任意形状の断面二次モーメント及び断面係数を計算するプログラムを作成してみます。

長方形断面の重心軸回りに関する断面二次モーメントは、次式により算出できます。

$$I = \frac{bh^3}{12} \quad (5.8)$$

b [m] は長方形の幅, h [m] は高さを表します.

一方, 図 5.4 に示すような, 重心軸から a [m] だけ離れた場所にある長方形の断面二次モーメントは, 次の平行軸の定理により求められます.

$$I = \frac{bh^3}{12} + a^2S \quad (5.9)$$

ここで, S は対象図形の面積です.

$$S = b \times h$$

(5.9) 及び (5.7) 式を使って, 長方形によって構成される任意形状の断面二次モーメント及び断面係数を求めるプログラムを次に示します. 与えられた形状を構成する各長方形の断面二次モーメントの合計が, 総合の断面二次モーメントになります. ただし, 簡単のために形状は重心軸に対して対象であるとしします.

100 !---断面二次モーメントと断面係数

110 set window -100, 100, -100, 100

120 draw grid(10.0, 10.0)

130

140 declare external picture Rectangle

150 declare numeric i, n, b, h, ax, ay, ymax, j, s

160

170 input prompt "図形分割数 [-] を入力して下さい": n

180 let ymax=0.0

190 let j=0.0

200 let s=0.0

210

220 for i=1 to n

230 input prompt "新しい分割領域の幅、高さ、水平、垂直距離を入力して下さい [mm]": b, h, ax, ay

240 if b>0.0 then

250 set area color 1

260 draw Rectangle with SCALE(b/2.0, h/2.0)*SHIFT(ax, ay)

270 else

280 set area color 2

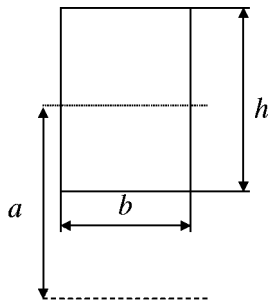


図 5.4: 平行軸の定理

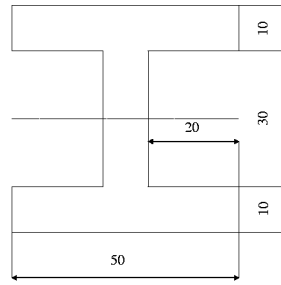


図 5.5: I型断面はり

```

290     draw Rectangle with SCALE(abs(b)/2.0, h/2.0)*SHIFT(ax, ay)
300 end if
310
320 if (abs(ay)+h/2.0)>ymax then let ymax=abs(ay)+h/2.0
330
340 let s=s+b*h
350 let j=j+b*h^3/12.0+ay^2*b*h
360 print "現在の総面積は", s, "[mm^2]"
370 next i
380
390 print "断面二次モーメントは", j, "[mm^4]"
400 print "断面係数は", j/ymax, "[mm^3]"
410
420 end
430
440 external picture Rectangle
450 plot area: -1.0, -1.0; 1.0, -1.0; 1.0, 1.0; -1.0, 1.0
460 end picture

```

プログラムの説明 140行は形状を描画する外部関数の宣言です。描画関数 Rectangle は 440-460行に定義してあります。220行は変数の宣言です。表 5.2 に変数一覧を示します。170行では与えられた形状をいくつかの長方形に分割して計算するかを入力しています。180-200行は変数の初期化です。

表 5.2: 変数リスト

i	ループ変数	
n	長方形への分割数	入力値
b	長方形の幅	入力値
h	長方形の高さ	入力値
ax	長方形の x 座標	描画にのみ使用
ay	長方形の y 座標	
y _{max}	最大の端面距離	
j	断面二次モーメント	
s	面積	

220-470 行が分割された各長方形に対する入力と計算部です。長方形の幅と高さを入力し、画面への描画（240-300 行）、最大の端面距離の評価（320 行）、断面二次モーメントと面積の計算（340-360 行）を行っています。ただし、穴の場合には幅をマイナスとして入力しています（これでも計算できることを自分で確認してみてください）。断面係数は、求めた総合の断面二次モーメントと端面距離から、400 行で計算、出力をしています。

例題 図 5.5 に示すような断面形状のはりについて入力、計算を行ってみましょう。ここでは図形を三分割して考えます。一番目は上端の部分（ $b=50\text{mm}$, $h=10\text{mm}$, $ax=0\text{mm}$, $ay=20\text{mm}$ ）, 二番目は中心部（ $b=10\text{mm}$, $h=30\text{mm}$, $ax=0\text{mm}$, $ay=0\text{mm}$ ）, 三番目は下端部（ $b=50\text{mm}$, $h=10\text{mm}$, $ax=0\text{mm}$, $ay=-20\text{mm}$ ）です。計算結果を次に示します。

図形分割数 [-] を入力して下さい 3

新しい分割領域の幅, 高さ, 水平, 垂直距離を

入力して下さい [mm] 50, 10, 0, 20

現在の総面積は 500 [mm²]

新しい分割領域の幅，高さ，水平，垂直距離を
 入力して下さい [mm] 10, 30, 0, 0
 現在の総面積は 800 [mm²]
 新しい分割領域の幅，高さ，水平，垂直距離を
 入力して下さい [mm] 50, 10, 0, -20
 現在の総面積は 1300 [mm²]
 断面二次モーメントは 430833.333333334 [mm⁴]
 断面係数は 17233.333333334 [mm³]

課題1 同じ総面積で最大の断面係数を持つ形状を調査してみましょう。加工のしやすさなども考えてみて下さい。

課題2 円も細かく分割すれば長方形の集まりとして考えられます。プログラムを使って、円の断面二次モーメント・断面係数を近似計算してみてください。求まった値を円の公式による結果と比較してみましょう。

課題3 例題プログラムは、ひとまず対照的な図形について考えました。次は図形の重心も不明として算出し、求まった重心回りの断面二次モーメント、断面係数を計算するプログラムを作成してみてください。

5.2.2 せん断力・曲げモーメント・たわみ線図

はりの最大曲げ応力を求めるには、5.6式で示したように、断面係数と最大曲げ応力が必要でした。前節では断面係数を求めるプログラムを作成しました。ここでは、はりのせん断力線図(SFD)及び曲げモーメント線図(BMD)を描画、最大曲げモーメントを求め、曲げ応力を計算してみましょう。また、たわみの基礎式からたわみ線図を描画してみましょう。

図5.6に示すように、 n 個の集中荷重が作用する両端支持はりについて考えます。 i 番目の荷重 P_i [N] によるせん断力 S_i [N] 及び曲げモーメント

M_i [N・m] は、それぞれ次の式で求められます [4],[5] .

$$S_i(x) = \begin{cases} R_{A,i} & (0 \leq x \leq x_i) \\ -R_{B,i} & (x_i \leq x \leq l) \end{cases} \quad (5.10)$$

$$M_i(x) = \begin{cases} R_{A,i}x & (0 \leq x \leq x_i) \\ R_{B,i}(l-x) & (x_i \leq x \leq l) \end{cases} \quad (5.11)$$

ただし、 x_i [m] は荷重座標、 $R_{A,i}$ 及び $R_{B,i}$ [N] は支点反力を表します .

$$R_{A,i} = \frac{l-x_i}{l} P_i \quad (5.12)$$

$$R_{B,i} = \frac{x_i}{l} P_i \quad (5.13)$$

また、たわみ y_i [m] は曲げの基礎式

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{M_i(x)}{EI} \quad (5.14)$$

に 5.11 式で計算される曲げモーメントを代入して積分することにより、荷重の両側においてそれぞれ次の式で計算できます .

$$y_i(x) = \begin{cases} R_{A,i} \cdot \frac{x}{6EI} (x^2 - 2x_i l + x_i^2) & (0 \leq x \leq x_i) \\ R_{B,i} \cdot \frac{l-x}{6EI} (x^2 - 2xl + x_i^2) & (x_i \leq x \leq l) \end{cases} \quad (5.15)$$

はりに作用するすべての荷重による結果は、重ね合わせの原理により求めることができます . 以上の式により、任意個数 (ここでは最大 10 個) の荷重が作用する場合の SFD、BMD 及びたわみ線図を描画するプログラムを次に示します .

```

100 ! ---はりのたわみ線図 (両端支持はり・集中荷重の場合)
110 set window -0.1, 1.0, -1.1, 1.1
120 draw grid(0.5, 0.5)
130
140 declare numeric i, j, n, l, dx, E, SMA, Z, xj, &
&                                smax, bmax, dmax
150 dim x(10), p(10), sfd(101), bmd(101), defl(101)

```

```

160
170 !-関数の定義(両支点反力)
180 def RA(i)=(l-x(i))/l*p(i)
190 def RB(i)=x(i)/l*p(i)
200
210 !-データ入力
220 input prompt "はりの長さ [m] を入力して下さい": l
230 let dx=l/100.0
240 input prompt "はりの縦弾性係数を入力して下さい [GPa] を入力し
て下さい": E
250 let E=E*10^9
260 input prompt "はりの断面二次モーメント [mm^4] を入力して下さい": SMA
270 let SMA=SMA*10.0^(-12)
280 input prompt "はりの断面係数 [mm^3] を入力して下さい": Z
290 let Z=Z*10.0^(-9)
300 do
310   input prompt "集中荷重の数 [-] を入力して下さい": n
320 loop while n>10
330
340 for i=1 to n
350   input prompt "荷重の位置 [m] と大きさ [N] を入力して下さい": &
&
&           x(i), p(i)
360 next i
370
380 !-せん断力・曲げモーメント・たわみの計算
390 mat sfd=ZER
400 mat bmd=ZER
410 mat defl=ZER
420 for j=1 to 101
430   let xj=(j-1)*dx
440   for i=1 to n
450     if xj<=x(i) then
460       let sfd(j)=sfd(j)+RA(i)
470       let bmd(j)=bmd(j)+RA(i)*xj
480       let defl(j)=defl(j)-RA(i)*xj/6.0/E/SMA&
&
&           *(xj^2-2.0*x(i)*l+x(i)^2)
490     else

```

```
500      let sfd(j)=sfd(j)-RB(i)
510      let bmd(j)=bmd(j)+RB(i)*(1-xj)
520      let defl(j)=defl(j)-RB(i)*(1-xj)/6.0/E/SMA&
&          *(xj^2-2.0*xj*1+x(i)^2)
530      end if
540      next i
550 next j
560
570 !-せん断力・曲げモーメント・たわみの最大値の計算
580 let smax=0.0
590 let bmax=0.0
600 let dmax=0.0
610 for i=1 to 101
620   if abs(sfd(i))>smax then let smax=abs(sfd(i))
630   if abs(bmd(i))>bmax then let bmax=abs(bmd(i))
640   if abs(defl(i))>dmax then let dmax=abs(defl(i))
650 next i
660
670 !-SFDの描画
680 set color 2
690 for i=1 to 101
700   plot lines: (i-1)*dx/l, sfd(i)/smax;
710 next i
720
730 !-BMDの描画
740 plot lines
750 set color 3
760 for i=1 to 101
770   plot lines: (i-1)*dx/l, bmd(i)/bmax;
780 next i
790
800 !-たわみの描画
810 plot lines
820 set color 1
830 for i=1 to 101
840   plot lines: (i-1)*dx/l, -defl(i)/dmax;
850 next i
860
```

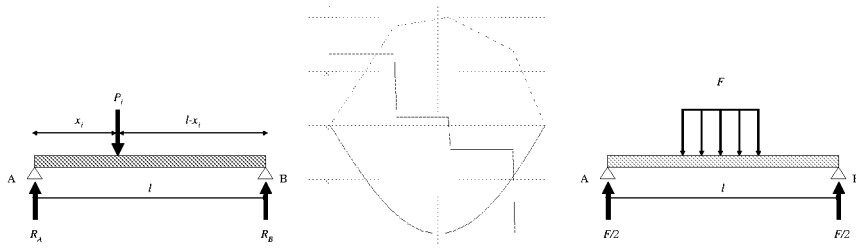


図 5.6: 集中荷重の作用する両端支持はり 図 5.7: SFD・BMD・たわみ線図 図 5.8: ピストンピンを受ける力

```

870 print "最大曲げモーメントは", bmax/1000.0, "[kN・m]"
880 print "最大曲げ応力は", bmax/z/10.0^6, "[MPa]"
890 print "最大たわみは", dmax*1000.0, "[mm]"
900
910 end

```

表 5.3: 変数リスト

i, j, xj	ループ変数		smax	SFD の最大値	
n	荷重の個数	入力値	bmax	BMD の最大値	
l	はりの長さ	入力値	dmax	たわみの最大値	
dx	はりの分割長さ		x	荷重座標配列	入力値
E	縦弾性係数	入力値	p	荷重配列	入力値
SMA	断面二次モーメント	入力値	sfd	SFD 配列	
Z	断面係数	入力値	bmd	BMD 配列	
			defl	たわみ配列	

プログラムの説明 まず, 140 及び 150 行で変数と配列の宣言をしています. 表 5.3 に変数一覧を示します. 170 から 190 行は支点反力計算式の定義です.

210-290 行ははりの材質・形状データの入力部であり, 300-360 行で作用

する荷重の個数及び各荷重の位置と大きさを入力しています。

このプログラムでははりを 100 分割し、各座標におけるせん断力、曲げモーメント、たわみを求め、重ね合わせの原理により SFD, BMD, たわみ線図の値を求めています。なお、各線図はそれぞれの最大値で正規化して描画しています。380-550 行が各座標におけるせん断力等の計算、570-650 行で各最大値を求め、670-850 行で各線図を描画しています。

例題 長さ 1[m] で、5.2.1 節の例題で調べた断面形状を持つ両端支持はりがあります。左端から 30, 55, 85[cm] の場所にそれぞれ 300, 150, 400[kN] の力が作用するときの各線図を描画し、最大曲げ応力を求めてみましょう。ただし、はりの縦弾性係数は 206[GPa] とします。

描画した各線図を図 5.7 に、他の計算結果を下記に示します。

はりの断面二次モーメント [mm⁴] を入力して下さい 430833

はりの断面係数 [mm³] を入力して下さい 17233

集中荷重の数 [-] を入力して下さい 3

荷重の位置 [m] と大きさ [N] を入力して下さい 0.3, 300000

荷重の位置 [m] と大きさ [N] を入力して下さい 0.55, 150000

荷重の位置 [m] と大きさ [N] を入力して下さい 0.85, 400000

最大曲げモーメントは 110.625 [kN・m]

最大曲げ応力は 6419.36981372947 [MPa]

最大たわみは 131.458900604809 [mm]

課題 1 両端支持はりにおいて、等分布荷重が作用する場合の計算プログラムを作成してみてください。

課題 2 片持ちはりにおいて、集中荷重・等分布荷重が作用する場合の計算プログラムを作成してみてください。

課題3 5.1節で考えたピストンクランク機構においては、ピストンピンには図5.8に示すような荷重が作用すると近似できます。コンロッドの小端部において、力（ここでは慣性力とするが、通常は燃焼圧力による力の方が大きい）を等分布荷重として支えています。ピストンピンは長さ40[mm]、外径20[mm]、内径14[mm]の円管とし、コンロッド小端部幅を20[mm]とすると、各線図や最大曲げ応力について計算を行ってみてください。

5.3 ガスサイクル

自動車や飛行機などの機械を動かすために、我々は熱機関と呼ばれる機械を利用しています。熱機関は熱エネルギーを仕事に変換しますが、その中でも動作流体が気体のものをガスサイクルと呼びます。身近なガソリンエンジンやディーゼルエンジンなどの往復作動式エンジンでは、燃料を燃焼させることにより熱を発生、生じた高温高压ガスによってピストンクランク機構を作動させ、回転仕事を取り出しています。ここでは、このような往復作動式エンジンのガスサイクルについて調査してみることになります。

5.3.1 理論熱効率

まず、身近な二種類のエンジンについて、熱効率がどのような傾向を持つのか調査してみましよう。ただし、ここで求めるのは理論熱効率であり、実機関における損失は考慮していません。

オットーサイクル オットーサイクルは定容サイクルとも呼ばれ、定容的に加熱が行われるサイクルです。ガソリンエンジン等の火花点火エンジンにおいては、吸入した混合気を圧縮し、ちょうど上死点付近で点火栓により着火、急激な燃焼によりほぼ定容的に熱が加えられると仮定できます。そのため、オットーサイクルは火花点火エンジンを近似するサイクルとされています。

ディーゼルサイクル 一方、ディーゼルサイクルは定圧サイクルとも呼ばれ、定圧的に加熱が行われるサイクルです。ディーゼルエンジン（圧縮着火エンジン）では空気のみを圧縮し、その高温空気の中へ燃料を噴射します。燃料は空気と混合し、自着火に至ったところから燃えはじめます。燃焼は緩慢なため、特に低速ディーゼルエンジンでは膨張過程において、ほぼ圧力一定の状態が熱が発生すると仮定できます（実際にはかなり異なります。）そのため、このサイクルは圧縮着火エンジンを近似するサイクルとされています。

いずれのエンジンにおいても、排気行程においては下死点で瞬時にガスの交換が行われ、定容的に排熱されると近似します。また、圧縮・膨張の各行程は断熱的に行われると仮定します。

オットーサイクル及びディーゼルサイクルの理論熱効率 η_{oto} 、 η_{di} は、それぞれ次の式により求められます [7, 6]。

$$\eta_{oto} = 1 - \frac{1}{\epsilon^{\kappa-1}} \quad (5.16)$$

$$\eta_{di} = 1 - \frac{1}{\epsilon^{\kappa-1}} \frac{\sigma^{\kappa} - 1}{\kappa(\sigma - 1)} \quad (5.17)$$

ここで、 κ は比熱比、 ϵ は圧縮比、 σ は締切比を表します。これらの式を用い、圧縮比に対する熱効率の変化を計算してみましょう。十進 BASIC によるプログラムを次に示します。

```

100 ! ---理論熱効率の計算
110 set window -2.0, 30.0, -5.0, 100.0
120 draw grid(5.0, 10.0)
130
140 declare numeric eps, kap, zet
150 input prompt "比熱比と締切比を入力して下さい(kap, zet)": kap, zet
160
170 ! -オットーサイクルの理論熱効率

```

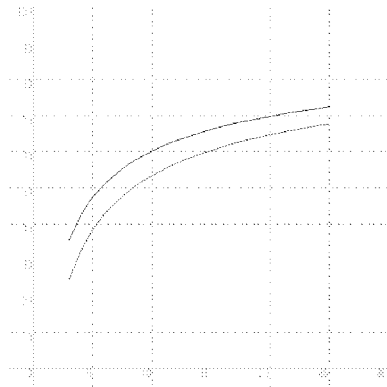


図 5.9: オットーサイクル・ディーゼルサイクルにおける理論熱効率の比較

```

180 plot lines
190 set line color 2
200 for eps=3 to 25
210   plot lines: eps, (1-(1/eps)^(kap-1))*100.0;
220 next eps
230
240 !-ディーゼルサイクルの理論熱効率
250 plot lines
260 set line color 4
270 for eps=3 to 25
280   plot lines: eps,
290     (1-(zet^kap-1)*(1/eps)^(kap-1)/kap/(zet-1))*100.0;
300 next eps
310
320 end

```

プログラムの説明 もうこの程度のプログラムでは説明は必要ありませんね。140行は変数の宣言です。リストは表 5.4 に示してあります。入力された比熱比，締切比において，圧縮比が 3 から 25 の範囲で各熱効率の計算，描画を行っています。青線はオットーサイクル，赤線はディーゼルサイクルを表します。

表 5.4: 変数リスト

kap	比熱比	入力値	zet	締切比	入力値
eta	圧縮比	入力値			

例題 図 5.9 に，比熱比が 1.4，締切比が 2 の場合における計算結果を示します．損失を考慮していないため，実際のエンジンではいずれももっと低い値になりますが，図から，同じ圧縮比で比較した場合には，全体的にオットーサイクルの方が熱効率が高いことが分かります．

一般的に，ディーゼルエンジンはガソリンエンジンより高い熱効率を持つ，という話は聞いたことがあると思います．この違いはどういうことでしょうか？それは，エンジンの運転条件にあります．自動車に用いられているようなガソリンエンジンでは，ノッキング（異常燃焼）を防ぐために圧縮比が 9 から 12 程度の範囲に制限されています．一方，ディーゼルエンジンにはその制限がないため，通常 16 から 21 程度の範囲で運転されています．したがって，このような運転条件を考慮すると，ディーゼルエンジンの方が高い熱効率を得られることがわかります．

課題 1 比熱比を変化させて，その影響について考察してみてください．なぜ希薄燃焼方式のエンジンは高い熱効率を達成することができるのでしょうか？

次節では，これらガスサイクルについてももう少し詳しく調べてみることにします．本節では最終的な理論熱効率式の比較を行いました，サイクル中の各状態変化を計算，描画し，それぞれの特徴について詳細な比較を行っていきましょう．

5.3.2 ガスサイクルの p - v 線図と t - s 線図

系の状態が変化し、再びもとの状態に戻るとき、そのたどる過程をサイクルと呼びます。熱機関のサイクルは通常、いくつかの状態変化によって構成されています。基準となる数個の状態点を経由し、最初の点まで戻ってくる各過程を計算して、仕事や熱量について検討を行ってみましょう。

ガスサイクルの評価を行う際、 p - v 線図や t - s 線図が用いられます。 p - v 線図では比体積 $v[\text{m}^3/\text{kg}]$ に対して圧力 $p[\text{Pa}]$ をプロットしており、サイクル線図の囲む面積は仕事 $w[\text{J}/\text{kg}]$ を表します。また、 t - s 線図においては比エントロピー $s[\text{J}/\text{kg}]$ に対して温度 $T[\text{K}]$ をプロット、その囲む面積は熱量 $q[\text{J}/\text{kg}]$ を表します。

サイクル計算を行うために、まずは一つの状態変化について必要な式を考えてみましょう。計算にはガス定数や比熱等の物性値が必要です。また、指定された状態の状態量を明らかにする必要があります。二点間の状態変化はポリトロープ変化にしたがうとし、変化後の状態量を計算します [7, 6]。

理想気体のガス定数 $R[\text{J}/\text{kg}\cdot\text{K}]$ と分子量 $M[\text{kg}/\text{kmol}]$ 、一般ガス定数 $R_0=8314[\text{J}/\text{kmol}\cdot\text{K}]$ の間には次の関係があります。

$$R = \frac{R_0}{M} \quad (5.18)$$

また、比熱比 $\kappa[-]$ が与えられた場合には、ガス定数 R を用いて定圧比熱 $c_p[\text{J}/\text{kg}\cdot\text{K}]$ 、定容比熱 $c_v[\text{J}/\text{kg}\cdot\text{K}]$ を次の式で計算することができます。

$$c_p = \frac{\kappa R}{\kappa - 1} \quad (5.19)$$

$$c_v = \frac{R}{\kappa - 1} \quad (5.20)$$

示量性状態量としては、質量 $m[\text{kg}]$ 、初期の体積 $V[\text{m}^3]$ のいずれかを与えます。理想気体の場合、次の状態方程式が成り立ちますから、 p 、 v 、 T のうち二つの示強性状態量が指定されると、残りの一つの状態量が決定されます。ただし、未だ与えられていない量を与える必要があります（例え

ば V が与えられているときには p と T を与え, m を求める) .

$$pv = RT \quad (5.21)$$

$$pV = mRT$$

また, 比内部エネルギー u [J/kg], 比エンタルピー h [J/kg], 比エントロピー s [J/kg·K] は, 基準状態として圧力 $P_0=0.1013$ [MPa], $T_0=273.15$ [K] をとると, それぞれ次の式で求められます .

$$u = c_v (T - T_0) \quad (5.22)$$

$$h = c_p (T - T_0) \quad (5.23)$$

$$s = c_p \ln \left(\frac{T}{T_0} \right) - R \ln \left(\frac{P}{P_0} \right) \quad (5.24)$$

さて, 状態変化はポリトロブ変化として一般化できます . ポリトロブ変化は次式により表され,

$$pv^n = const \quad (5.25)$$

ポリトロブ指数 n が 0 の場合には等圧変化, 1 の場合には等温変化, 比熱比 κ に等しい場合には断熱変化, 無限大の場合には等容変化に対応します . また, (5.25) 式と理想気体の状態方程式 (5.21) より, 次の式が導かれます .

$$Tv^{n-1} = const \quad (5.26)$$

$$\frac{T}{P^{\frac{n-1}{n}}} = const \quad (5.27)$$

これらの式により, 与えられたポリトロブ指数による二点間の状態変化を計算することができます . 初期状態点をのぞき, 各経由点の状態量の一つはこれらの式から求められますから, 残り一つの状態量を計算者が与えて行くことになります .

次に，変化にともない外部に対して行われる仕事，及び加えられる熱量を計算します．ポリトロープ指数 n が 1 及び無限大でない場合には，1[kg] の理想気体が状態 1-2 間で行う仕事 w_{12} [J/kg] は次式で求められます．

$$\begin{aligned} w_{12} &= \int_1^2 p dv = \frac{p_1 v_1}{n-1} \left[1 - \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^{n-1} \right] = \frac{p_1 v_1}{n-1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} \right] \\ &= \frac{1}{n-1} (p_1 v_1 - p_2 v_2) = \frac{R}{n-1} (T_1 - T_2) \end{aligned} \quad (5.28)$$

熱量 q_{12} [J/kg] は熱力学の第一法則より次式で求められます．

$$\begin{aligned} q_{12} &= c_v (T_2 - T_1) + w_{12} = c_v (T_2 - T_1) + \frac{R}{n-1} (T_1 - T_2) \\ &= \left(c_v - \frac{R}{n-1} \right) (T_2 - T_1) = c_v \frac{n-\kappa}{n-1} (T_2 - T_1) \end{aligned} \quad (5.29)$$

ポリトロープ指数が 1，すなわち等温変化の場合には仕事と熱量は等しく，次式で求められます．

$$w_{12} = q_{12} = RT \ln \frac{p_1}{p_2} = RT \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (5.30)$$

ポリトロープ指数が無限大，すなわち等容変化の場合には仕事 w はゼロで，熱量は次式で表されます．

$$\begin{aligned} w_{12} &= 0 \\ q_{12} &= c_v (T_2 - T_1) \end{aligned} \quad (5.31)$$

以上から，サイクル全体における正味仕事 W [J] 及び系に加えられた熱量 Q [J] は，次式で求められることとなります．添え字は各段階における状態変化を表します．

$$W = m \sum_{i=1}^n w_i \quad (5.32)$$

$$Q = m \sum_{i=1}^n Q'_i \quad (5.33)$$

$$(5.34)$$

ここで、 Q は系に加えられた熱量を表すため、 Q'_i には次の値を用います。

$$Q'_i = \begin{cases} Q_i & Q_i > 0 \\ 0 & Q_i \leq 0 \end{cases}$$

最後に、サイクル熱効率 $\eta[-]$ は次式で求めることができます。

$$\eta = \frac{W}{Q} \quad (5.35)$$

以上の式を用いて、最大 10 個の状態点により構成されるガスサイクル（もちろんサイクルなので、最後は初期状態点に戻ってこないといけませんよ）の解析を行うプログラムを次に示します。今度はちょっと大がかりですね。でも、入出力部がややこしいだけで、計算はこれまで示した式を使っているだけです。入出力部はわかりやすくするため、文献 [8] の例を参考にさせていただきました。

```

1000 !---ガスサイクルの p-v 線図と t-s 線図
1010 !-副プログラムの宣言
1020 declare external sub Property
1030 declare external sub State
1040 declare external sub UHS
1050 declare external sub Output
1060 declare external sub Process
1070 declare external sub WQ
1080
1090 !-p-v 線図表示用座標軸
1100 set window -0.1, 1.0, -0.1, 3.0
1110 draw grid(0.1, 1.0)
1120 !-t-s 線図表示用座標軸
1130 !set window -0.1, 0.5, 250.0, 1000.0
1140 !draw grid(0.1, 100.0)
1150
1160 declare numeric nin, ns, si
1170 declare numeric p0, t0, R, mw, k, cp, cv
1180 declare numeric m, vv, n, w, q, wt, qt, dp, dv
1190 declare numeric pn, vn, tn, un, hn, sn
1200 dim p(10), v(10), t(10), u(10), h(10), s(10)

```

```
1210 let p0=0.1013*10^6
1220 let t0=273.15
1230
1240 !-データ入力
1250 do
1260   input prompt "計算する状態の数を入力して下さい":ns
1270 loop while ns>10
1280
1290 call Property(R, mw, k, cp, cv)
1300
1310 let m=0.0
1320 let vv=0.0
1330 do
1340   input prompt "示量性状態量として [(1) 質量・(2) 体積] を入
力します":nin
1350
1360   select case nin
1370     case 1
1380       input prompt "質量 [kg] を入力して下さい":m
1390       if m>0.0 then exit do
1400     case 2
1410       input prompt "体積 [m^3] を入力して下さい":vv
1420       if vv>0.0 then exit do
1430     case else
1440       print "正しい番号を入力して下さい"
1450   end select
1460 loop
1470
1480 let si=1
1490 let pn=0.0
1500 let tn=0.0
1510
1520 print si, "の状態点について入力します"
1530 call State(pn, vv, tn)
1540 call State(pn, vv, tn)
1550
1560 if m=0.0 then let m=pn*vv/R/tn
1570 if pn=0.0 then let pn=m*R*tn/vv
```



```
1580 if vv=0.0 then let vv=m*R*tn/pn
1590 if tn=0.0 then let tn=pn*vv/m/R
1600 let vn=vv/m
1610
1620 call UHS(R, cp, cv, pn, tn, un, hn, sn, p0, t0)
1630 let p(si)=pn
1640 let v(si)=vn
1650 let t(si)=tn
1660 let u(si)=un
1670 let h(si)=hn
1680 let s(si)=sn
1690
1700 !-初期状態の出力
1710 print "ガス定数は", R/1000.0, "[kJ/kg/K]"
1720 print "比熱比は", k, "[-]"
1730 print "定圧比熱は", cp/1000.0, "[kJ/kg/K]"
1740 print "定容比熱は", cv/1000.0, "[kJ/kg/K]"
1750 print "質量は", m, "[kg]"
1760 call Output(si, m, p, v, t, u, h, s)
1770
1780 !-状態変化の計算
1790 let wt=0.0
1800 let qt=0.0
1810
1820 for si=2 to ns
1830   print si, "の状態点について入力します"
1840   let pn=0.0
1850   let vv=0.0
1860   let tn=0.0
1870
1880   do
1890     input prompt "ポリトロップ指数 [-] を入力して下さい":n
1900
1910     if n=0.0 then
1920       print "等圧変化です"
1930       let pn=p(si-1)
1940     elseif n=1.0 then
1950       print "等温変化です"
```

```
1960         let tn=t(si-1)
1970     elseif n=k then
1980         print "断熱変化です"
1990         let sn=s(si-1)
2000     elseif n>10.0 then
2010         print "等容変化です"
2020         let vn=v(si-1)
2030         let vv=vn*m
2040     end if
2050 loop while n<0.0
2060
2070 call State(pn, vv, tn)
2080 call Process(m, p(si-1), v(si-1), t(si-1), pn, vn, tn, vv, n)
2090 call UHS(R, cp, cv, pn, tn, un, hn, sn, p0, t0)
2100 let p(si)=pn
2110 let v(si)=vn
2120 let t(si)=tn
2130 let u(si)=un
2140 let h(si)=hn
2150 let s(si)=sn
2160 call Output(si, m, p, v, t, u, h, s)
2170 call WQ(si, R, k, cp, cv, m, v, t, n, w, q)
2180 print "W = ", w/1000.0, "[kJ]"
2190 print "Q = ", q/1000.0, "[kJ]"
2200 let wt=wt+w
2210 if q>0.0 then let qt=qt+q
2220
2230 set line color 2
2240 plot lines: v(si-1), p(si-1)/10.0^6;
2250 ! plot lines: s(si-1)/1000.0, t(si-1);
2260 if n>10 then
2270     plot lines: v(si), p(si)/10.0^6;
2280     ! let dp=(p(si)-p(si-1))/100.0
2290     ! for pn=p(si-1) to p(si) step dp
2300     ! let tn=t(si-1)*pn/p(si-1)
2310     ! let sn=cp*log(tn/t0)-R*log(pn/p0)
2320     ! plot lines: sn/1000.0, tn;
2330     ! next pn
```

```
2340 else
2350     let dv=(v(si)-v(si-1))/100.0
2360     for vn=v(si-1) to v(si) step dv
2370         let pn=p(si-1)*(v(si-1)/vn)^n
2380         !           let tn=t(si-1)*(v(si-1)/vn)^(n-1.0)
2390         !           let sn=cp*log(tn/t0)-R*log(pn/p0)
2400         plot lines: vn, pn/10.0^6;
2410         !           plot lines: sn/1000.0, tn;
2420     next vn
2430 end if
2440 next si
2450
2460 if qt>0.0 then
2470     print " - - - ガスサイクルの計算結果 - - - "
2480     print "仕事は", wt/1000.0, "[kJ]"
2490     print "熱量は", qt/1000.0, "[kJ]"
2500     print "熱効率", wt/qt*100.0, "[%]"
2510 end if
2520
2530 end
2540
2550 ! --- 熱物性値の計算サブルーチン
2560 external sub Property(R, mw, k, cp, cv)
2570 declare numeric ni n, R0
2580 let R0=8.3143
2590
2600 do
2610     input prompt "[ (1) 分子量・(2) ガス定数 ] を入力します": ni n
2620
2630     select case ni n
2640     case 1
2650         input prompt "分子量 [g/mol] を入力して下さい": mw
2660         if mw>0.0 then
2670             let R=R0/mw*1000.0
2680             exit do
2690         end if
2700     case 2
2710         input prompt "ガス定数 [kJ/kg/K] を入力して下さい": R
```

```
2720     if R>0.0 then
2730         let mw=R0/R
2740         let R=R*1000.0
2750         exit do
2760     end if
2770 case else
2780     print "正しい番号を入力して下さい"
2790 end select
2800 loop
2810
2820 input prompt "比熱比 [-] を入力して下さい": k
2830 let cp=k*R/(k-1.0)
2840 let cv=R/(k-1.0)
2850
2860 end sub
2870
2880 !---状態量入力サブルーチン
2890 external sub State(pn, vv, tn)
2900 declare numeric nin
2910
2920 do
2930     input prompt "[ (1) 圧力・(2) 体積・(3) 温度 ] を入力します": nin
2940
2950     select case nin
2960     case 1
2970         if pn>0.0 then
2980             print "圧力はすでに与えられています"
2990         else
3000             input prompt "圧力 [MPa] を入力して下さい": pn
3010             let pn=pn*10.0^6
3020             if pn>0.0 then exit do
3030         end if
3040     case 2
3050         if vv>0.0 then
3060             print "体積はすでに与えられています"
3070         else
3080             input prompt "体積 [m^3] を入力して下さい": vv
3090             if vv>0.0 then exit do
```

```
3100     end if
3110   case 3
3120     if tn>0.0 then
3130       print "温度はすでに与えられています"
3140     else
3150       input prompt "温度 [K] を入力して下さい": tn
3160       if tn>0.0 then exit do
3170     end if
3180   case else
3190     print "正しい番号を入力して下さい"
3200   end select
3210 loop
3220
3230 end sub
3240
3250 ! ---比内部エネルギー・比エンタルピ・比エントロピの計算サブルーチン
3260 external sub UHS(R, cp, cv, pn, tn, un, hn, sn, p0, t0)
3270 let un=cv*(tn-t0)
3280 let hn=cp*(tn-t0)
3290 let sn=cp*log(tn/t0)-R*log(pn/p0)
3300
3310 end sub
3320
3330 ! ---状態変化の計算サブルーチン
3340 external sub Process(m, p1, v1, t1, p2, v2, t2, vv, n)
3350 if n<10 then
3360   if vv>0.0 then
3370     let v2=vv/m
3380     if p2=0.0 then let p2=p1*(v1/v2)^n
3390     if t2=0.0 then let t2=t1*(v1/v2)^(n-1.0)
3400   elseif p2>0.0 then
3410     if vv=0.0 then let v2=v1*(p1/p2)^(1.0/n)
3420     if t2=0.0 then let t2=t1*(p2/p1)^((n-1.0)/n)
3430   else
3440     if vv=0.0 then let v2=v1*(t1/t2)^(1.0/(n-1.0))
3450     if p2=0.0 then let p2=p1*(t2/t1)^(n/(n-1.0))
3460   end if
```

```

3470 else
3480   if t2=0.0 then let t2=t1*p2/p1
3490   if p2=0.0 then let p2=p1*t2/t1
3500 end if
3510
3520 end sub
3530
3540 !---仕事と熱量の計算サブルーチン
3550 external sub WQ(si, R, k, cp, cv, m, v(), t(), n, w, q)
3560 if n=1.0 then
3570   let w=m*R*t(si)*log(v(si)/v(si-1))
3580   let q=w
3590 elseif n>=10 then
3600   let w=0.0
3610   let q=m*cv*(t(si)-t(si-1))
3620 else
3630   let w=m*R*(t(si-1)-t(si))/(n-1.0)
3640   let q=m*cv*(t(si)-t(si-1))*(n-k)/(n-1.0)
3650 end if
3660
3670 end sub
3680
3690 !---状態量の出力サブルーチン
3700 external sub Output(si, m, p(), v(), t(), u(), h(), s())
3710 print "状態点", si
3720 print "圧力は", p(si)/10.0^6, "[MPa]"
3730 print "体積は", v(si)*m, "[m^3]"
3740 print "温度は", t(si), "[K]"
3750 print "比内部エネルギーは", u(si)/1000.0, "[kJ/kg/K]"
3760 print "比エンタルピは", h(si)/1000.0, "[kJ/kg/K]"
3770 print "比エントロピは", s(si)/1000.0, "[kJ/kg/K]"
3780
3790 end sub

```

プログラムの説明 まず, 1010-1070 行は外部副プログラムの宣言です。これらの定義は後述しますが, そのリストを表 5.6 に示します。1090-1140 行は座標軸の設定です。描画するグラフに応じて適切なものを選択, 他をコ

メントアウトして下さい。1160-1220 行は変数の宣言と初期値の設定です。変数の一覧は表 5.5 に示します。備考の入力値は必ず入力する値、選択値はメニューから必要に応じて入力する値、既定値は定数を表します。

1250-1270 行で計算する状態点の個数を入力し（最終点は第一点と同一ですが、ここでは一つの点として入力することにしましょう）、1290 行で Property を呼び出して熱物性値を計算しています。Property の定義は 2550-2860 行で、分子量かガス定数のいずれかを入力して他方を計算、また、定圧比熱と定容比熱の計算を行っています。

1310-1460 行では、示量性状態量として質量もしくは体積を入力しています。1480-1600 行では初期状態点における示強性状態量の入力を行っています。第一点目であることから二つの状態量を入力し、残りの値を算出しています。状態量の入力は State 関数により行っています。State の定義は 2880-3230 行ですが、State が一度コールされると、あるステップ（状態点）における未入力状態量の中から、必ず一つが入力されるようになっています。また、1620 行では UHS 関数によって比内部エネルギー、エンタルピ、エントロピの計算を行っています。1630-1680 行では第一点目 ($s_i=1$) の結果として、各状態量の保存配列に現在の値を格納しています。

ここまでが系全体、また初期状態点に関する計算部です。1700-1760 行で熱物性値の出力、また Output 関数を呼び出すことによって状態量を画面に出力しています。Output の定義は 3690-3790 行です。

さて、ここからはいよいよ状態変化（目指すはサイクル）の計算です。1790-1800 行では総合の仕事、熱量を初期化しています。1820-2440 行が、各状態変化に関するループです。ある状態点 s_i に関する値を一つ前の状態点から求めています。新しい状態点の値を p_n, v_n, t_n 変数で表し、それらは各ステップ、ゼロに初期化されています（すなわち未入力の値はゼロ）。

1880-2050 行ではこの状態変化に対するポリトロップ指数を入力してい

ます。入力されたポリトロプ指数が特定の値の場合には、定圧変化や等温変化、断熱変化に対応しますから、その場合にはそれぞれ一定となる状態量を新しい変数に設定しています。なお、ポリトロプ指数が無限大の場合は等容変化を表しますが、プログラム中では無限大を表現できないため、10より大きい場合には等容変化であるとしています。

新しい状態点においては、一つ前の状態点における値から状態量が一つ求まります。そのため、まず2070行であと一つの状態量を指定しています（ここで指定される状態量は、特定の状態変化により設定された状態量とは異なるものでなくてはなりません）。2080行のProcess関数が状態変化を計算する外部副プログラムです。その定義は3330-3520行目にあります。(5.25)、(5.26)、(5.27)式によって、新しい状態点における未決定の示強性・示量性状態量を求めています。それぞれ各式を見ながら対応させてみて下さい。

2090行は比内部エネルギー等の計算です。また、2100-2150行では新しい状態点における各状態量を配列に保存し、2160行で画面に表示しています。2170行ではこの状態変化における仕事と熱量の変化を求める関数、WQを呼び出しています。その定義は3540-3670行にあり、ポリトロプ指数に応じた式を用いて計算しています。2200-2210行では総合の仕事量に加算していますが、熱量については系に加えられた値のみを評価しています。

2230-2430行は状態変化の描画部です。 $p-v$ 線図、 $t-s$ 線図のいずれを表示させたいかによって、コメントアウトする行を選択して下さい。新しい点までの横軸値を100分割し、それぞれに対する縦軸値をプロットしています。自分で確かめてみて下さい。最後に熱効率などを出力してプログラムは終了します。

例題1 まずはサイクルではなく、ひとつの状態変化について調べてみましょう。

表 5.5: 変数リスト

nin	メニュー番号の入力に用いる一時変数	
ns	状態点の数	入力値
si	現在の状態点番号	
p0	初期圧力	既定値
t0	初期温度	既定値
R	ガス定数	選択値
R0	一般ガス定数	既定値
mw	分子量	選択値
k	比熱比	入力値
cp	定圧比熱	
cv	定容比熱	
m	質量	選択値
vv	体積	選択値
n	ポリトロップ指数	入力値
w	現在の状態変化における仕事量	
q	現在の状態変化における熱量	
wt	サイクル全体における仕事量	
qt	サイクル全体において加えられた熱量	
dq	p - v 線図描画時の圧力増分	
ds	t - s 線図描画時のエントロピー増分	
pn	状態変化後の圧力	選択値
vn	状態変化後の比体積	選択値
tn	状態変化後の温度	選択値
un	状態変化後の比内部エネルギー	
hn	状態変化後の比エンタルピー	
sn	状態変化後の比エントロピー	
p	各状態点の圧力配列	
v	各状態点の比体積配列	
t	各状態点の温度配列	
u	各状態点の比内部エネルギー配列	
h	各状態点の比エンタルピー配列	
s	各状態点の比エントロピー配列	

表 5.6: 外部副プログラムリスト

Property	熱物性値の計算
State	状態量の入力
UHS	非内部エネルギー, エンタルピー, エントロピーの計算
Output	状態量の画面への出力
Process	状態変化の計算
WQ	仕事と熱量の計算

第 5.3.1 節で述べたように, ディーゼルエンジンでは空気を吸入・圧縮し, 高温高圧となった空気中へ燃料を噴射することにより自着火させています. 今, 直列 6 気筒で排気量が 7800[cc] のトラック用過給式ディーゼルエンジンがあります. 燃料の着火温度を約 600[K] とするとき, どの程度の圧縮比 ϵ が必要になりますか? ただし, 圧縮行程においてはポリトロープ指数が 1.35 のポリトロープ変化を行うとします. また, 吸入する空気は過給により圧力 0.2[MPa], 温度 350[K] であり, 分子量は 29[g/mol], 比熱比は 1.4 とします.

この場合, 初期の示量性状態量として体積 (一気筒あたり 1300[cc]), 示強性状態量として圧力と温度が与えられています. 計算すべき状態点数は, 初期状態を含めて二点です. この間の状態変化 (指数 1.35 によるポリトロープ変化) を計算し, 到達温度を調査することになります. 圧縮比は $\epsilon = V_1/V_2$ として与えられますから, 第 2 点目の体積を任意に指定しながら, 到達温度が着火点に至る圧縮比を検討することになります.

圧縮比を 17 とした場合の計算結果を次に示します.

圧力は	9.24177033350013	[MPa]
体積は	7.60000000000001E-5	[m ³]
温度は	945.504195658091	[K]

この場合には十分着火温度に到達していますね. サイクルとして考えた場

合には、圧縮比は熱効率とも関係してきます。いろいろと計算させて検討してみてください。

課題1 ここで、この例題における到達圧力を見てみましょう。9[MPa]程度の値になっていることが分かります。等圧サイクルとした場合、この値がサイクル最高圧力です。このエンジンは、ボア（ピストン直径） D ×ストローク S が 115[mm]×125[mm]、コンロッド中心間距離が 200[mm]、また最大出力時のエンジン回転数が 3000[rpm] であるとします。ピストン質量は 1.5[kg] です。ピストンに作用する慣性力と圧力による力（ $= p_{max} \times \pi D^2 / 4$ ）、どちらが支配的でしょうか？第 5.1 節で作成したプログラムを使って検討してみましょう。

課題2 ある状態点から、状態変化が起こったとします。等圧変化、等温変化、断熱変化、また任意指数のポリトロップ変化である場合について、その変化の過程（変化後の状態量、仕事、熱量）について調査してみてください。各変化における p - v 線図と t - s 線図についても比較してみましょう。例えば 10 気圧で室温の空気が体積 10 倍まで膨張した場合にはどのように変化しますか？

例題2 次はサイクル計算を行ってみましょう。ここでは、直列 4 気筒で排気量が 1800[cc]、ボア × ストロークが 80[mm]×92[mm]、圧縮比が 10、コンロッド中心間距離が 160[mm] の自然吸気ガソリンエンジン（火花点火式エンジン）について調査します。作動流体は空気として考え、計算を行ってみましょう（これは理想的なサイクル計算における仮定です）。

第 5.3.1 節で述べたように火花点火式エンジンはオットーサイクルで近似できますから、その経路にしたがって入力を進めて行くことにします。

- 1.1 2：断熱圧縮
- 2.2 3：等容加熱

3.3 4: 断熱膨張

4.4 5: 等容冷却

サイクルですから状態点5は1のことで、プログラムの都合上、5番目の点として入力します。

第1点は初期状態です。吸入空気の圧力は0.101[MPa]、温度は300[K]とします。一気筒辺りの体積は450[cc]ですね。圧縮後の体積 V_2 は圧縮比から求められますから、2番目の点の指定量として体積を入力します。この例では45[cc]です。等容加熱の過程では燃焼により圧力が急速上昇します。3番目の点の指定量として圧力を入力しますが、ガソリンエンジンの場合、この燃焼圧力は経験的に次の式で求めることができます。

$$p_{max}[\text{Pa}] = (7\epsilon - 2)g \times 10^4 \quad (5.36)$$

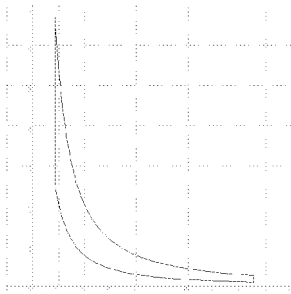
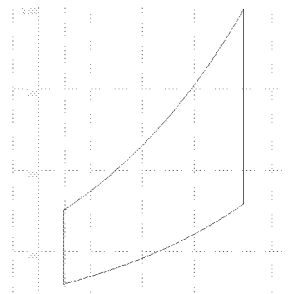
g は重力加速度です。この例では約6.7[MPa]となります。より正しくは、燃料の発熱量を用いて計算することになります。断熱膨張過程では初期体積まで膨張しますから、4番目の点の指定量として体積を入力し、第1点と同じ体積を与えます。最後に5番目の点の指定量として第1点の圧力を入力し、サイクルを完結させます。

このサイクルについて計算した結果を次に示します。また、 $p-v$ 線図を図5.10に、 $t-s$ 線図を図5.11に示します。

- - - ガスサイクルの計算結果 - - -

仕事は	. 281888624415026	[kJ]
熱量は	. 468336904219724	[kJ]
熱効率は	60. 1892829446504	[%]

この計算結果では熱効率が60%程度にもなっています(第5.3.1節の結果と同様です)。実際には最大でもこの半分程度の効率しか得られません。それは、実機関においては空気サイクルが燃料-空気サイクルになったり(比

図 5.10: p - v 線図図 5.11: t - s 線図

熱比の変化), 燃焼過程における損失, 吸排気における損失, 機械的な損失など, 種々の損失が現れてくるからです。ですから, あくまでも定性的な傾向を捉えるものだと考えて下さい。

課題2 オットーサイクルとディーゼルサイクルにおいて, それぞれ次の場合についてサイクルの比較・検討を行ってみて下さい。また, 締切比や比熱比の影響について検討して下さい。

- 圧縮比を揃えた場合
- 最高圧力を揃えた場合

余裕のある人はサバテサイクルについても計算・比較をしてみましょう。

課題3 本節で取り上げた以外にも, ガスサイクルにはブレイトンサイクル, スターリングサイクル, ミラーサイクルなど, 種々のサイクルが存在します。これらについて調査してみてください。各サイクルはどのような意図のもとに構成され, どのような特徴を持つのでしょうか?

サイクル計算に慣れた人は, 自分なりのサイクルを作ってみて下さい。本当に実現・製作できるかどうか? ということを頭において考えてみましょう。

う。材料などについては調査が必要だと思いますが，熱機関における現在の限界と新しいアイデアが見えてくると良いですね。

5.4 流れの数値シミュレーション

近年，内燃機関や航空機の機体といった機械製品の設計・開発段階において，計算機を用いた予測計算の導入が盛んになっています。特に，熱流体の計算分野を CFD (Computational Fluid Dynamics) と呼び，汎用的な計算ソフトウェアも増えてきました。化学反応を伴わない流れの計算（例えばエンジンシリンダ内の空気流動）であれば，十分実用に耐える段階にきており，設計・開発期間の短縮と経費削減につながっています。

本節では，このような流れのシミュレーションを対象にします。ただし，いきなり本格的な計算は大変ですから，Navier-Stokes 方程式を簡略化した一次元 Burgers 方程式を考えることにします。

5.4.1 Burgers 方程式

一次元の Burgers 方程式は次式で表されます。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (5.37)$$

ここで， u [m/s] は速度， t [s] は時間， x [m] は一次元空間における座標を表します。また， ν [m²/s] は Navier-Stokes 方程式における動粘性係数に対応します。Burgers 方程式は簡単な形をしていますが，Navier-Stokes 方程式から圧力勾配項を除いた形に対応しており，非線形対流項と粘性項を持つ発展型の方程式になっています。非線形項と粘性項の存在は衝撃波を発生させますので，流れの研究においては重要な基礎方程式です。ここではこの衝撃波の発達について観察します。そして，流れの計算法が衝撃波の発達にどのような影響を与えるのかを調べましょう。

時間発展を伴う現象の観察には、アニメーション表示が効果的です。十進 BASIC は簡単にグラフィックの描画ができますから、このような場合にもとても有効なツールだと言えます。

さて、(5.37) 式に示すような時間発展型方程式を計算機で解いてゆく場合には、まず次のような形に変形を行います。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (5.38)$$

上式において左辺は時間微分項ですから、時刻ゼロにおける初期条件 $u(x, 0)$ と系の境界条件を与えれば、後に述べる時間積分法により時々刻々の速度 $u(x, t)$ を求めて行くことができます。ただし、そのためには右辺における空間座標に対する微分項を適切に評価（離散化）しなくてはなりません。次節ではこれらの計算手法について述べます。

5.4.2 差分法

差分法は最も古くから、そして今も最も広く利用されている空間離散化手法です。連続した空間をプログラム上で離散的に（有限の点で）計算するため、計算領域を適切な個数に分割し、その格子点上において変数値や微係数を計算して行きます。詳しい説明は文献に譲ることにして [9, 10, 11]、ここでは次の二つの差分法を使ってその差を検討することにしましょう。

二次精度中心差分 これは関数 $u(x)$ のテイラー展開により導かれる手法で、一階、二階の微分値はそれぞれ次式で表されます。

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u(x + \Delta x, t) - u(x - \Delta x, t)}{2\Delta x} \quad (5.39)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u(x + \Delta x, t) - 2u(x, t) + u(x - \Delta x, t)}{\Delta x^2} \quad (5.40)$$

ここで、 Δx は格子幅を表します。計算領域幅を X 、分割数を N とすると、 $\Delta x = X/N$ です。また、この公式を用いる場合、誤差は分割数の 2 乗に比例して減少します。詳しくは上述した文献を参考にして下さい。

一次精度上流差分 後で計算結果をもとに考察しますが，二次精度中心差分を対流項に用いると計算が不安定化します．その対策として，上流差分（風上差分とも呼ぶ）が知られています．上流差分を対流項に対して適用すると，次のように表すことができます．

$$\left(u \frac{\partial u}{\partial x}\right) = \begin{cases} u(x, t) \frac{u(x, t) - u(x - \Delta x, t)}{\Delta x} & u(x, t) > 0 \\ u(x, t) \frac{u(x + \Delta x, t) - u(x, t)}{\Delta x} & u(x, t) < 0 \end{cases} \quad (5.41)$$

上流差分では，ある格子点の変数値（例えば流速や温度）は流れの上流側からの影響を主に受けると考えます．したがって，格子点における流速の正負により，上流側における差分をとって微係数を求めています．

また，(5.41) 式は次のように整理することができます．

$$\begin{aligned} \left(u \frac{\partial u}{\partial x}\right) &= u(x, t) \frac{u(x + \Delta x, t) - u(x - \Delta x, t)}{2\Delta x} \\ &- |u(x, t)| \frac{u(x + \Delta x, t) - 2u(x, t) + u(x - \Delta x, t)}{2\Delta x} \end{aligned} \quad (5.42)$$

右辺第一項は二次精度中心差分を用いた対流項の形であり，第二項は二階の二次精度中心差分を用いて次の用に表せます．

$$\frac{1}{2}|u| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x \quad (5.43)$$

これを (5.37) 式に適用すると次の用に表されますから，

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \left(\nu + \frac{1}{2}|u|\Delta x\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (5.44)$$

(5.42) 式の第二項は数値的な粘性項として作用することになります．実は，この数値粘性項が時間積分を安定化させることになります．

5.4.3 時間積分法

さて，(5.38) 式の右辺における空間微分項の計算ができるようになります．次は時間積分を考えましょう．

時間積分法にも多くの種類があります．一つの分類として，陽解法と陰解法があります．陽解法では現在明らかな変数値から直接未来の値を求めますが，陰解法では未来の値が必要となり，連立方程式を解く必要があります．また，高い精度を求めるときにはルンゲ・クッタ法を用いたり，対流項と粘性項に違う手法を用いたりします（例えば対流項には Adams-Bashforth 法，拡散項には Crank-Nicholson 法）．

詳細は文献 [9, 10, 11] で学んで頂くこととし，本節では最も簡単な一次精度オイラー法を用いることにします．ただし，この手法は無条件に不安定ですので，十分小さな時間刻み Δt [s] をとって計算することにします．

一次精度オイラー法 一次精度オイラーの陽解法は次の様に表されます．

$$\frac{\partial F}{\partial t} = f(x, t)$$

このとき新しい時間ステップの変数値 $F(x, t + \Delta t)$ は次式で表されます．

$$F(x, t + \Delta t) = \Delta t \cdot f(x, t)$$

したがって，Burgers 方程式の場合には次式から新しい時間ステップにおける速度を求めて行くことになります．

$$u(x, t + \Delta t) = \Delta t \cdot \left(-u \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_t \quad (5.45)$$

ここで，時間刻み Δt の決定にはクーラン数 C が指標となります．クーラン数は次式で定義され，時間刻み幅の間に格子点を超えて情報が伝わらない条件を表します．

$$C = u_{max} \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (5.46)$$

陽解法では少なくともこのクーラン数が 1 以下でないと計算が不安定化します（CFL 条件）．計算対象・条件や必要精度にもよりますが，通常 0.5 以下に設定します．

5.4.4 差分法の種類による比較

以上の式により Burgers 方程式による衝撃波の時間発展過程を観察してみましよう。

計算領域は $-\pi$ から π の区間とし、境界条件には周期境界条件を与えます。すなわち、計算領域の両側には同じものがミラーリングされて続いていると考えます。プログラム上での計算領域は無限にとれませんから、必ず端っこがあります。今回の場合は、それが x 座標で $-\pi$ から π の区間であり、右端と左端が存在するわけです。ここで、例えば右端の点を考えると、その点における空間微分値の計算にはそのさらに右隣の値が必要になりますよね。周期境界条件では全く同じ計算領域が続いていると考えますので、右端の点の隣には、仮想的に左端の点があると考えます。これが周期境界条件です。

初期条件は次のように与えます。

$$u(x, 0) = -\sin x \quad (5.47)$$

すなわち、時刻ゼロにおいて領域中心の左側では正の、右側では負の速度を持っています。領域にある流体塊はどのような変化をすると予測されますか？

時間刻みはクーラン数を考慮し、 $0.01[s]$ に設定します。最大速度が $1[m/s]$ 、分割数 N が 100 、 Δx が $2\pi/N$ とすると、クーラン数は約 0.16 です。

この条件の下に、中心差分を用いて作成したプログラムを次に示します。

```
100 !---バーガース方程式
110 !-時間前進：オイラーの陽解法
120 !-対流項：2次精度中心差分・拡散項：2次精度中心差分
130
140 set window -pi, pi, -2.0, 2.0
150 draw grid(1.0, 0.5)
160
170 declare numeric i, dx, dt, x, t, vis
```

```
180 dim v1(100), v2(100)
190
200 let dx=2*pi/100.0
210 let dt=0.01
220 let vis=0.01
230
240 !-初期条件
250 set line color 2
260 for i=1 to 100
270   let x=i-1
280   let v1(i)=-sin(-pi+x*dx)
290   plot lines: -pi+x*dx, v1(i);
300 next i
310 plot lines: pi, v1(1)
320
330 !--- 差分法による計算
340 set line color 1
350 for t=0 to 160
360   for i=1 to 100
370     if i=1 then
380       let v2(1)=v1(1)&
&           +dt*(&
&               -v1(1)*(v1(2)-v1(100))/2.0/dx&
&               +vis*(v1(2)-2.0*v1(1)+v1(100))/dx/dx&
&           )
390     elseif i=100 then
400       let v2(100)=v1(100)&
&           +dt*(&
&               -v1(100)*(v1(1)-v1(99))/2.0/dx&
&               +vis*(v1(1)-2.0*v1(100)+v1(99))/dx/dx&
&           )
410     else
420       let v2(i)=v1(i)&
&           +dt*(&
&               -v1(i)*(v1(i+1)-v1(i-1))/2.0/dx&
&               +vis*(v1(i+1)-2.0*v1(i)+v1(i-1))/dx/dx&
&           )
430     end if
```


表 5.7: 変数リスト

i	do ループ変数	t	時間
dx	格子幅	vis	動粘性係数
dt	時間刻み幅	v1	現在の速度配列
x	座標変数	v2	新しい時刻の速度配列

```

&          +(vis+abs(v1(i))*dx/2.0)&
&          *(v1(i+1)-2.0*v1(i)+v1(i-1))/dx/dx&
&          )
170      end if
180      next i

```

プログラムの説明 170-180行はいつもの通りの変数宣言です。リストは表 5.7 に示します。配列 v1 と v2 には、各分割点における現在の速度と新しいステップの速度を格納しています。v1 から v2 を求めて配列に格納して行くということです。v1(1) には左端、 $x=-\pi$ の速度値、v1(100) には右端から 1 格子分手前の値が格納されています。右端の値は周期境界条件より左端の値と同一ですから、差分計算時にはその値を与えます。

200-220 行において、格子幅、時間刻み幅、動粘性係数の設定を行っています。240-310 行では初期条件の設定をし、画面に青色で描画しています。

330-450 行が時間に関するループです。時刻ゼロから 160 ステップ目 ($160 \times dt$ 秒) までを計算しています。360-440 行がオイラー法の計算部です。境界条件によって分岐しており、差分式に対して、左端と右端の場合は周期境界条件を適用しています。460 行では配列の更新を行っています。これは、次のステップでは現在求めた新しいステップの値を v1 とするためです。480-540 行では 10 ステップ毎に速度線図を描画しています。

計算結果 中心差分を用いて計算した結果を図 5.12 に、上流差分を用いて計算した結果を図 5.13 に示します。図から、時間が進むにしたがって初期

のサインカーブが立ち上がって行き、衝撃波が形成されて行く様子わかります。

一方、中心差分の場合には、157 ステップ ($\pi/2[s]$) あたりから速度分布に不安定性が発生していることがわかります。衝撃波の近傍でギザギザが発生しています。これは、差分精度が不足することにより発生する現象です。図 5.14 に、フーリエ・スペクトル選点法により計算を行った結果を拡大して示します。スペクトル法は周期境界条件の場合に適用でき、比較的少ない格子点数でも高い精度が得られる手法です。図中、黒線と赤線はスペクトル法による結果であり、黒線は 2304 分割の場合、赤線は 96 分割の場合を表します。青線は二次精度中心差分で、緑線は一次精度上流差分による結果です。

図から、高精度のスペクトル法においては非常になめらかに計算できており、衝撃波近傍での不安定性はまったく見られません。一方、一次精度上流差分においても不安定性が観察されません。しかしながら、これは前述した数値粘性により解が抑え込まれた結果であり、衝撃波発生以前ではむしろ誤差が大きくなっています。解像度を下げたスペクトル法においては、解全体に渡って弱い波が発生しています。しかしながら、この解は高精度スペクトル法における解を中心としており、平均的な速度誤差は小さいものになります。

このように、差分法一つで計算結果（工学的な予測結果）が変わってることが理解してもらえたと思います。中心差分は基本的には上流差分より精度が高いのですが、不安定さが大きく発散する可能性があります。今回は言及しませんでした。スペクトル法は特殊な条件でしか使うことができません。

本節の冒頭で述べたように、最近では設計開発段階で流体計算ソフトウェアが用いられることが多くなっています。これらの汎用ソフトウェアを用いれば、半分はブラックボックスで計算を行うことができます。でも、計算

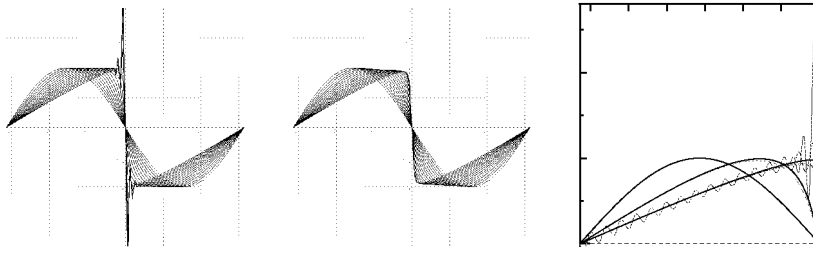


図 5.12: 対流項に中心差分を用いた場合 図 5.13: 対流項に上流差分を用いた場合 図 5.14: スペクトル法との比較

がうまく行かないときなど、自分で適切な計算法、初期条件、境界条件等を設定してあげる必要があります。このように、適切な計算法を選択すること、これも機械技術者が持つておくの良いノウハウではないでしょうか。

課題 1 時間積分にルンゲ・クッタ法を用いたプログラムを作成し、比較検討を行って下さい。時間刻み幅や格子幅など、どのような影響が見られますか？

課題 2 Burgers 方程式に対するプログラムを参考に、次の一次元対流拡散方程式を解くプログラムを作成して下さい。

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \quad (5.48)$$

対流拡散方程式では物質濃度 $c[\text{kg}/\text{m}^3]$ の変化を追跡して行きます。 $D[\text{m}^2/\text{s}]$ は拡散係数を表します。また、速度 u は Navier-Stokes 方程式などと連立させ、各格子点における値を随時求めて行かねばならないのですが、ここでは簡単のために定数としましょう。

境界条件は左端が物質の流入（常に $c=1$ ）、右端が物質の流出（常に $c=0$ ）とします。初期条件は、左端を除き物質濃度ゼロとします。

また，対流拡散方程式におけるクーラン数は次式で表されます．

$$C = D \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \quad (5.49)$$

適切な時間刻みを選択して下さい．

これらの条件において拡散係数や速度の影響について計算し，考察してみして下さい．

5.5 おわりに

以上，4つのテーマについて，十進 BASIC を使った計算・調査を行ってきました．機械工学の基礎科目それぞれから代表的なテーマを取り上げて説明してきましたが，他にも計算機を使って調べられる課題がたくさんあります．本章で試みたことを参考に挑戦してみてください．

計算機が教えてくれることは限られていますし，実験から見いだせることが真実です．でも，簡単な計算によって講義で学んだことを視覚的に確かめたり，調査したりすることは，理解を深めるのにとっても役立ちます．また，新しい発見への道しるべになるかもしれません．計算機は一つの道具です．うまくつきあって，学習や研究に役立てられることを願っています．

最後になりますが，本章を執筆するのに，関連した多くの書籍を参考にさせて頂きました．ここに記し，謝意を表します．

関連図書

- [1] 森田均, 機構学, サイエンス社.
- [2] 広安博之, 宝諸幸男, 大山宜茂”, 内燃機関, コロナ社.
- [3] 国産エンジンデータブック編集委員会, 国産エンジンデータブック, 山海堂.
- [4] 渥美光, 鈴木幸三, 三ヶ田憲次, 材料力学 I, 森北出版.
- [5] 村上敬宣, 材料力学, 森北出版.
- [6] 佐藤孟, 工業熱力学の基礎, サイエンス社.
- [7] 日本機械学会, JSME テキストシリーズ熱力学, 日本機械学会.
- [8] 橋浦正史, 森治朔, 木下祥次, 河村隆雄, 篠原勝, 小栗久和, パソコンによる機械工学演習, 森北出版.
- [9] 大宮司久明, 三宅裕, 吉沢徹, 乱流の数値流体力学, 東京大学出版会.
- [10] 梶島岳夫, 乱流の数値シミュレーション, 養賢堂.
- [11] 平野博之, 流れの数値計算と可視化, 丸善.