

離散数学 学年末試験 (再試験) 問題

学籍番号

名前

注意事項

- ・ 授業ノート, テキストは参考にしてよいが, 自力で解くこと.
- ・ 2月20日(水)までに解いてください. 2月20日(水)以降になる場合はメールで菊地まで連絡してください.
- ・ $\mathbf{R}$ は実数の集合, $\mathbf{Z}$ は整数の集合, $\mathbf{N}$ は自然数の集合を表します. また, $0 \in \mathbf{N}$ とします.

問 1. 有限集合 A, B について常に成り立つのは次のどれか？

- a) $|A| + |B| \leq |A \cup B|$
- b) $|A| + |B| = |A \cup B|$
- c) $|A| + |B| \geq |A \cup B|$
- d) a,b,c のどれも常に成り立つ
- e) a,b,c のどれも常に成り立たない

問 2. 普遍集合を $|U| = 100$ とする. U には部分集合 A, B, C, D があり, $C \subseteq A, D \subseteq A$ である. また $|A| = 87, |B| = 18, |A \cap B^c| = 75, |C| = 36, |D| = 33, |C \cap D| = 11, |B \cap C| = 6, |B \cap D| = 7, |A \cap (B \cup C \cup D)| = 59$ が成り立っている. このとき下記の設問の値を求めなさい.

- (a) $|A \cap B|$.
- (b) $|(A \cup B)^c|$.
- (c) $|B \cap C \cap D|$
- (d) $|B^c \cap C \cap D^c|$
- (e) $|B^c \cap C^c \cap D|$

問 3. 普遍集合を $\mathbf{N}$ とする. 以下の命題の真偽を判定しなさい.

- (a) $(\forall x)(\exists y)(x \times y = 0)$
- (b) $(\exists x)(\forall y)(x \times y = 0)$
- (c) $(\forall x)(\exists y)(x \times y = 1)$
- (d) $(\exists x)(\forall y)(x \times y = 1)$
- (e) $(\exists x)(\exists y)(x \times y = 1)$
- (f) $(\forall x)(\exists y)(x \times y = x)$
- (g) $(\exists x)(\forall y)(x \times y = y)$

問 4. 普遍集合を $\mathbf{Z}$ とする. 以下の命題の真偽を判定しなさい.

- (a) $(\forall x)(\exists y)(x \times y = 0)$
- (b) $(\exists x)(\forall y)(x \times y = 0)$
- (c) $(\forall x)(\exists y)(x \times y = 1)$
- (d) $(\exists x)(\forall y)(x \times y = 1)$
- (e) $(\exists x)(\exists y)(x \times y = 1)$
- (f) $(\forall x)(\exists y)(x \times y = x)$
- (g) $(\exists x)(\forall y)(x \times y = y)$

問 5. 普遍集合を $\mathbf{R}$ とする. 以下の命題の真偽を判定しなさい.

- (a) $(\forall x)(\exists y)(x \times y = 0)$
- (b) $(\exists x)(\forall y)(x \times y = 0)$
- (c) $(\forall x)(\exists y)(x \times y = 1)$
- (d) $(\exists x)(\forall y)(x \times y = 1)$
- (e) $(\exists x)(\exists y)(x \times y = 1)$
- (f) $(\forall x)(\exists y)(x \times y = x)$
- (g) $(\exists x)(\forall y)(x \times y = y)$

問 6. 集合 $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ に対して正しい命題はどれか (複数選択可).

- a) A から B への関数は存在する.
- b) A から B への全射は存在する.
- c) A から B への単射は存在する.

問 7. 集合 $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ に対して正しい命題はどれか (複数選択可).

- a) A から B への関数は存在する.
- b) A から B への全射は存在する.
- c) A から B への単射は存在する.

問 8. 集合 $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ に対して正しい命題はどれか (複数選択可).

- a) A から B への関数は存在する.
- b) A から B への全射は存在する.
- c) A から B への単射は存在する.

問 9. 集合 $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ に, ある順序構造 R を定めたら Figure 1 のハッセ図が得られた. このとき, 以下の設問に答えなさい.

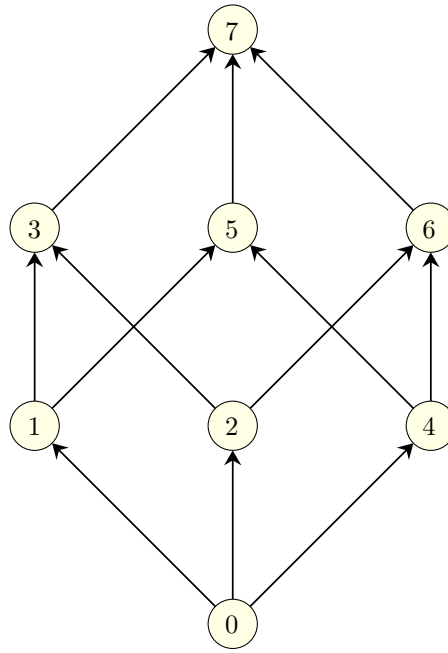


Figure 1: ハッセ図

設問 1 $\langle A, R \rangle$ の極小元をすべて答えなさい. 存在しないならば「存在しない」と答えなさい.

設問 2 $\langle A, R \rangle$ の極大元をすべて答えなさい. 存在しないならば「存在しない」と答えなさい.

設問 3 $\langle A, R \rangle$ の最大元は存在するか, 存在するならばその元を答えなさい. 存在しないならば「存在しない」と答えなさい.

設問 4 $\langle A, R \rangle$ の最小元は存在するか, 存在するならばその元を答えなさい. 存在しないならば「存在しない」と答えなさい.

設問 5 集合 $\{1, 2, 4\}$ の最大元は存在するか, 存在するならばその元を答えなさい. 存在しないならば「存在しない」と答えなさい.

設問 6 集合 $\{1, 2, 4\}$ の最小元は存在するか, 存在するならばその元を答えなさい. 存在しないならば「存在しない」と答えなさい.

設問 7 集合 $\{1, 4, 5\}$ の最大元は存在するか, 存在するならばその元を答えなさい. 存在しないならば「存在しない」と答えなさい.

設問 8 集合 $\{1, 4, 5\}$ の最小元は存在するか, 存在するならばその元を答えなさい. 存在しないならば「存在しない」と答えなさい.

設問 9 集合 $\{0, 2\}$ の上界をすべて答えなさい. 存在しないならば「存在しない」と答えなさい.

設問 10 集合 $\{0, 5\}$ の上界をすべて答えなさい. 存在しないならば「存在しない」と答えなさい.

問 10. 集合 $A = \{0, 1, 2\}$, 関係 $R = \{\langle 0, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle\}$ は同値関係か?

問 11. 集合 $A = \{0, 1, 2\}$, 関係 $R = \{\langle 0, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 0, 1 \rangle, \langle 0, 2 \rangle, \langle 1, 0 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 0 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \}$ は同値関係か?

問 12. 関数 $f(x, y)$ が 以下のように定義されている. このとき, 以下の設問に答えなさい.

$$\begin{cases} f(x, y) = 1 & (y = 0 \text{ のとき}) \\ f(x, y) = f(x, y-1) \times x & (y \neq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

設問 1 $f(2, 6)$ の値はいくつか.

設問 2 $f(3, 3)$ の値はいくつか.

問 13. $S = \{a, b, c, d, e\}$, $R = \{\langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle a, e \rangle, \langle b, d \rangle, \langle d, c \rangle\}$ であるとき, 以下の設問に答えなさい.

設問 1 $R^k = \emptyset$ となる最小の k を求めなさい.

設問 2 $\bigcup_{n=0}^k R^n = R^*$ となる最小の k を求めなさい.

問 14. 任意の根付き木 $\langle V, E, r \rangle$ において, 根以外の頂点集合から葉以外の頂点集合への対応 f を次で定義する.

$$f(x) = y \quad (y \text{ は } x \text{ に対して } yEx \text{ を満たす})$$

このとき, 正しい命題はどれか. a,b,c から選びなさい (複数選択可).

- a) f は関数でない.
- b) f は関数である.
- c) f は全射である.
- d) f は単射である.

問 15. 任意の根付き木 $\langle V, E, r \rangle$ において, 葉以外の頂点集合から根以外の頂点集合への対応 f を次で定義する.

$$f(x) = y \quad (y \text{ は } x \text{ に対して } xEy \text{ を満たす})$$

このとき, 正しい命題はどれか. a,b,c から選びなさい (複数選択可).

- a) f は関数でない.
- b) f は関数である.
- c) f は全射である.
- d) f は単射である.