

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで、問題冊子を開いて中を見てはいけません。
2. 答案用紙への学籍番号、名前などの記入は試験開始の合図があってから始めてください。
3. 試験時間は9時00分～10時30分の90分です。
4. 問は問1.～問11.の11問あります。
5. 問題に関する質問にはお答えできません。文意どおり解釈してください。
6. 問題冊子の余白などは適宜利用して構いません。
7. 電卓は使用できません。
8. 答案用紙に学籍番号と名前のないものは採点されません。必ず学籍番号と名前を答案用紙の指定されている欄に記入してください。
9. 試験終了後、この問題冊子は持ち帰ることができます。
10. 答案用紙は白紙であっても提出してください。
11. 試験時間中に気分が悪くなったりした場合は、手を挙げて試験監督者に合図してください。
12. 採点は厳格に行います。文字、記号などははっきりと記入してください。
13. $\mathbf{R}$ は実数の集合, $\mathbf{Z}$ は整数の集合, $\mathbf{N}$ は自然数の集合を表します。また, $0 \in \mathbf{N}$ とします。

問 1. (5 × 2 点) 100 人に対して定期購読のアンケート調査が行われた。その調査で 87 人が新聞を定期購読し、18 人が雑誌の定期購読をしていた。新聞のみを定期購読している人は 75 人であった。新聞を定期購読していた人の中で 36 人が A 新聞を定期購読し、33 人が B 新聞を定期購読していた。A 新聞と B 新聞の両方を定期購読していた人は 11、A 新聞と雑誌を定期購読していた人は 6 人、B 新聞と雑誌を定期購読していた人は 7 人だった。新聞を定期購読していた人の中で A 新聞、B 新聞または雑誌を定期購読している人は 59 人だった。

- (a) 新聞、雑誌の両方を定期購読している人数を求めなさい。 12 人
- (b) 新聞も雑誌も定期購読していない人数を求めなさい。 7 人
- (c) A 新聞のみを定期購読している人数を求めなさい。 21 人
- (d) B 新聞のみを定期購読している人数を求めなさい。 17 人
- (e) A 新聞、B 新聞、雑誌の 3 つすべてを定期購読している人数を求めなさい。 2 人

問 2. (4 点) k 個の要素からなる集合 S のべき集合の要素数はいくつになるか？理由も述べなさい。べき集合とは S の部分集合からなる集合である。

2^k

(理由) S のある部分集合を T とする。集合 S の各要素 a が T に含まれているならば 1 を割り当て、 T に含まれていないならば 0 を割り当てる。個の割り当ては集合 S のべき集合から k 桁の 2 進数の集合への全単射である。 k 桁の 2 進数の集合の要素数は 2^k であるから、集合 S のべき集合の濃度は 2^k である。

問 3. (2 × 4 点) 真理値表を使って下記の命題 P , Q の真理値を求めなさい。

$$P = (\neg((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r))) \vee (p \rightarrow r)$$

p	q	r	$(\neg((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)))$	$\vee$	$(p \rightarrow r)$
0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	1
1	1	0	1	0	0
1	1	1	0	1	1

⑥ が P の真理値

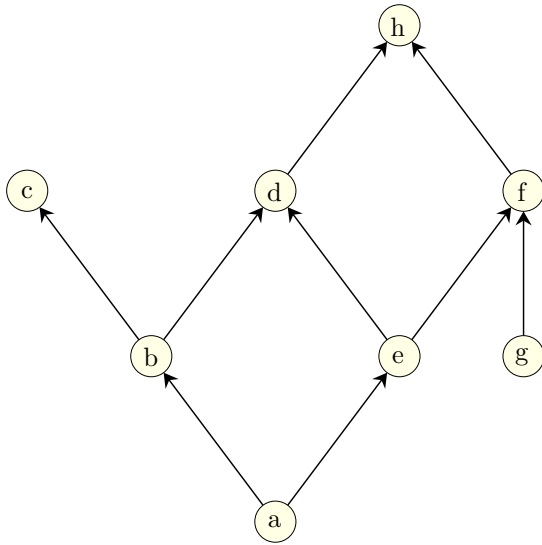
$$Q = (p \rightarrow q) \wedge (\neg((q \rightarrow r) \vee (p \rightarrow r)))$$

p	q	r	$(p \rightarrow q)$	$\wedge$	$(\neg((q \rightarrow r) \vee (p \rightarrow r)))$
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	0
1	1	1	1	0	0

⑥ が Q の真理値

問 4.(9×3 点) 集合 $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ に対して関係 $R = \{\langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle c, c \rangle, \langle d, d \rangle, \langle e, e \rangle, \langle f, f \rangle, \langle g, g \rangle, \langle h, h \rangle, \langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle a, d \rangle, \langle a, e \rangle, \langle a, f \rangle, \langle a, h \rangle, \langle b, c \rangle, \langle b, d \rangle, \langle b, h \rangle, \langle d, h \rangle, \langle e, d \rangle, \langle e, f \rangle, \langle e, h \rangle, \langle f, h \rangle, \langle g, f \rangle, \langle g, h \rangle\}$ が定められている。このとき以下の設問に答えなさい。

設問 1 $\langle A, R \rangle$ のハッセ図を描きなさい。



設問 2 $\langle A, R \rangle$ の極小元をすべて答えなさい。 $\underline{a, g}$

設問 3 $\langle A, R \rangle$ の極大元をすべて答えなさい。 $\underline{c, h}$

設問 4 $\langle A, R \rangle$ の最大元は存在するか、存在するならばその元を答えなさい。存在しないならば「存在しない」と答えなさい。 存在しない

設問 5 $\langle A, R \rangle$ の最小元は存在するか、存在するならばその元を答えなさい。存在しないならば「存在しない」と答えなさい。 存在しない

設問 6 集合 $\{d, e, f\}$ の最大元は存在するか、存在するならばその元を答えなさい。存在しないならば「存在しない」と答えなさい。 存在しない

設問 7 集合 $\{d, e, f\}$ の最小元は存在するか、存在するならばその元を答えなさい。存在しないならば「存在しない」と答えなさい。 e

設問 8 集合 $\{a, e, d\}$ の最大元は存在するか、存在するならばその元を答えなさい。存在しないならば「存在しない」と答えなさい。 d

設問 9 集合 $\{a, e, d\}$ の最小元は存在するか、存在するならばその元を答えなさい。存在しないならば「存在しない」と答えなさい。 a

問 5.(3×1 点) 同値関係 R が満たす 3 つの性質の名前をすべて答えなさい。

反射律、対称律、推移律

問 6.(5 点) ユークリッド平面上の直線の集合で交点をもつという関係は同値関係か？同値関係ならば証明を与え、同値関係でないならばどの性質を満たし、どの性質を満たさないか説明しなさい。

同値関係でない。

(理由) 推移律を満たさない。直線 l と直線 m が直交して交点をもち、直線 m と直線 n が直交して交点をもつとき、直線 l と直線 n は平行になり交点をもたない。

問 7.(5 点) 集合の包含関係は同値関係か？同値関係ならば証明を与え、同値関係でないならばどの性質を満たし、どの性質を満たさないか説明しなさい。

同値関係でない。

(理由) 対称律を満たさない。集合 A と B で $A \subseteq B$ であるとき、 $B \subseteq A$ であるとは限らない。

問 8.(5 点) 集合 $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ で関係 $\langle a, b \rangle R \langle c, d \rangle$ を $a + d = b + c$ で定義する。このとき関係 R は同値関係か？同値関係ならば証明を与え、同値関係でないならばどの性質を満たし、どの性質を満たさないか説明しなさい。

同値関係である。

(証明) $a + b = b + a$ より $\langle a, b \rangle R \langle a, b \rangle$ となり、反射律を満たす。

$\langle a, b \rangle R \langle c, d \rangle$ とすると $a + d = b + c$ であり、 $c + b = d + a$ となり、 $\langle c, d \rangle R \langle a, b \rangle$ である。よって対称律を満たす。

$\langle a, b \rangle R \langle c, d \rangle$ かつ $\langle c, d \rangle R \langle e, f \rangle$ とする。 $a + d = b + c$ 、 $c + f = d + e$ である。 $a + d + c + f = b + c + d + e$ となり、 $a + f = b + e$ を得る。よって $\langle a, b \rangle R \langle e, f \rangle$ が成り立ち、推移律を満たす。

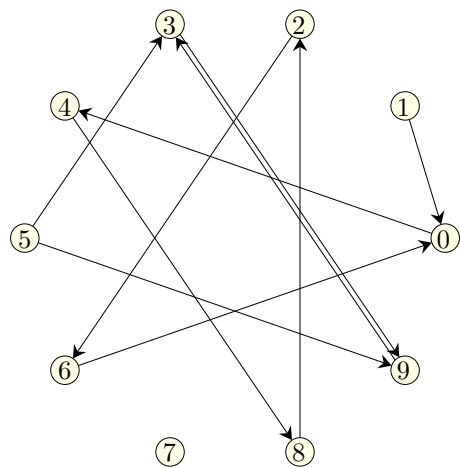
問 9.(5 点) $A = \{1, 2, 3\}$ 上の関係 $R = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle\}$ が同値関係となるように R に要素を追加しなさい。ただし、追加する要素はなるべく少なくすること。答えは追加する要素のみを答えなさい。

$\langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 2, 1 \rangle$

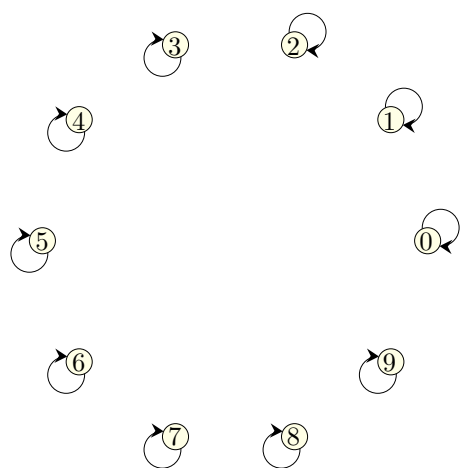
問 10. (4×5 点) 有向グラフ $\langle V, E \rangle$ を $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $E = \{\langle 0, 4 \rangle, \langle 1, 0 \rangle, \langle 2, 6 \rangle, \langle 3, 9 \rangle, \langle 4, 8 \rangle, \langle 5, 3 \rangle, \langle 5, 9 \rangle, \langle 6, 0 \rangle, \langle 8, 2 \rangle, \langle 9, 3 \rangle\}$ と定める。

このとき以下の設問に答えなさい。

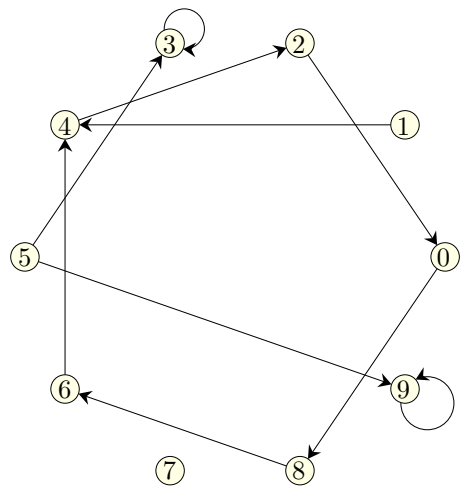
設問 1. 有向グラフ $\langle V, E \rangle$ を描きなさい。



設問 2. 有向グラフ $\langle V, E^0 \rangle$ を描きなさい。



設問 3. 有向グラフ $\langle V, E^2 \rangle$ を描きなさい。



設問 4. 同値関係 $R_1 \stackrel{def}{=} E^* \cap (E^{-1})^*$ としたとき, 頂点 0 と同じ同値類 (強連結成分) に入る頂点をすべて挙げなさい.

0, 2, 4, 6, 8

設問 5. 同値関係 $R_2 \stackrel{def}{=} (E \cup E^{-1})^*$ としたとき, 頂点 8 と同じ同値類 (弱連結成分) に入る頂点をすべて挙げなさい.

0, 1, 2, 4, 6, 8

問 11. (8 点) T を完全 3 分木 (葉以外の全ての頂点には 3 個の子が存在する木) とする. また, T の葉を $b_1, b_2, \dots, b_n$ とし, b_i の深さ (根からの距離) を d_i とする ($1 \leq i \leq n$). このとき $\sum_{i=1}^n 3^{-d_i} = 1$ が成り立つ. この等式を利用して,

$\max_{1 \leq i \leq n} d_i \geq \lceil \log_3 n \rceil$ が成り立つことを示しなさい.

(解答例)

$d = \max_{1 \leq i \leq n} d_i$ とする.

$$\sum_{i=1}^n 3^{-d_i} = 1 \text{ より } \sum_{i=1}^n 3^{-d} \leq 1$$

この式を変形していくと $n3^{-d} \leq 1$

$$3^{-d} \leq \frac{1}{n}$$

$$3^{-d} \leq n^{-1}$$

$$3^d \geq n$$

$$d \geq \log_3 n$$

$d \geq \lceil \log_3 n \rceil$ となり、不等式が成り立つ。