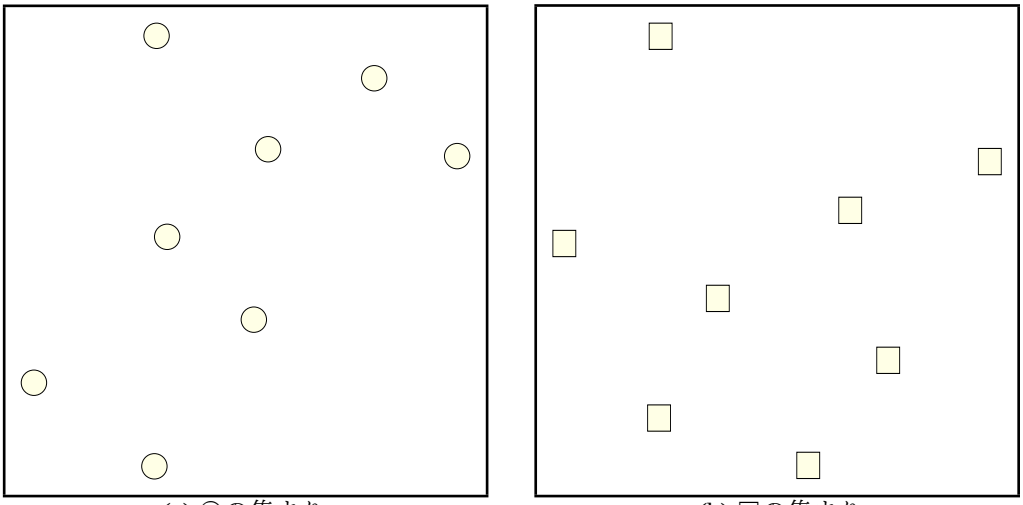
1　集合の対等性



(a) ○の集まり　　(b) □の集まり

図 1: ○の数と□の数

図 1 をみてください。(a) の○の集まり (○の集合) と (b) の□の集まり (□の集合) はどちらが多いでしょう。こう問われたときに皆さんはそれぞれの○の数と□の数を数えてどちらが多いかを判断するでしょう。図 2 で○の数はいくつですか、と問われたときに皆さんは○に 1 から順に数を割り当てていくでしょう。

集合の要素数が等しいかどうかを判定するときに私たちは一度、自然数と対応させて等しいかどうかを判定しています。集合の要素数を求めるときにも自然数と対応させています。集合の要素数が数えられて、しかも有限であれば集合の要素数は求められますが、例えば自然数の要素数はいくつかというのは具体的な数字では求められませんし、偶数の要素数はいくつかというのも具体的な数字では求められません。まして実数の要素数はいくつかというのも具体的な数字では求められません。整数と偶数はどちらがたくさんあるのかという疑問に対して、偶数は整数の部分集合だから整数の方がたくさんあるといえるのでしょうか？もし、整数の方がたくさんあるとすると偶数と同じくらいの無限と整数と同じくらいの無限があることになります。無限には何種類もの無限があることになります。

そこで、無限集合を扱う上で、どちらが要素数が多いかを判断する方法を昔の人 (多分、カントールだったと思います) は考えました。有限の集合の要素数の本質は自然数の部分集合との全単射なのではないかと、もっといえば２つの集合のあいだに全単射があれば要素数が同じといえる。そして、このことは無限集合でも成り立つとすればよい。つまり、要素数が等しいことを

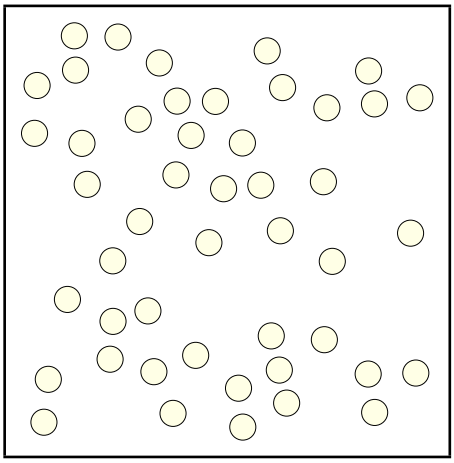


図 2: ○の数　その 2

全単射を使って定義してしまうということです。先ほどの図 1(a) は 1 から 8 までの自然数の集合との間に全単射が作れます。図 1(b) も 1 から 8 までの自然数の集合との間に全単射が作れます。この 1 から 8 までの自然数の集合との間の全単射を介して (a) と (b) の集合は同じ要素数であると判断しています。図 2 では 1 から 47 までの自然数の集合との間に全単射が作れるからこの図の要素数は 47 であるといえます。ならば集合の要素数の比較はその集合どうしの全単射の有無で判断できると考えたのです。ここで、集合 A の要素数を濃度とよぶことにし、$|A|$ で書くことにします。$|A| = 3$ ならば集合 A の濃度は 3 です。そして 2 つの集合のあいだに全単射が存在すれば、その集合は対等であるといいます。図 1 の○の集合と□の集合は対等です。先ほどは○の集合から自然数への対応を考え、□の集合から自然数への対応を考えました。自然数を介して○の集合と□の集合は対等と考えましたが、ここでは自然数を介することなく、て○の集合から□の集合への全単射が存在することで対等であるとしている点が注意しなければならないポイントの一つです。そしてもう一つは「2 つの集合のあいだに全単射が存在すれば」の全単射の存在によって対等性を述べている点です。2 つの集合のあいだには全単射でない写像しか存在しない。つまり、全単射が作れない集合どうしの場合があります。一方で、2 つの集合のあいだには全単射でない写像も存在するけど、全単射である写像も存在する場合があります。つまり、2 つの集合が対等であることを示すにはうまくその 2 つの集合のあいだに全単射を作ってあげればよいのです。そして、2 つの集合が対等でないことを示すにはその 2 つの集合のどの写像も全単射になっていないことを示さなくてはなりません。また、集合 A から集合 B への単射が存在すれば $|A| \leq |B|$ です。

2　自然数の濃度

自然数 $\mathbb{N}$ の濃度を $\aleph_0$ (アレフゼロと読みます。$\aleph$ はヘブライ語の A だそうです。手書きのときは N みたいな感じなのですが斜線が縦線の交点で止まらずに少し延長された感じになります。延長されるのは両方の交点です。[1]) であらわします。自然数 $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,4,\ldots\}$[2] と非負整数 $\mathbb{Z}^+ = \{0,1,2,3,4,\ldots\}$ の濃度を比較してみましょう。$\mathbb{Z}^+$ のほうが $\mathbb{N}$ より要素が 1 大きいように思えますが、$\mathbb{Z}^+$ も $\mathbb{N}$ も無限です。そこで、先ほど述べたように全単射が作れないかを考えます。この場合、$f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{N}$, $f(x) = x+1$ は $\mathbb{Z}^+$ から $\mathbb{N}$ への全単射になっています。つまり、$\mathbb{Z}^+$ と $\mathbb{N}$ は対等ということになります。

次に自然数 $\mathbb{N} = \{1,2,3,4,\ldots\}$ と正の偶数の集合 $\{2,4,6,\ldots\}$ の濃度を比較してみましょう。偶数のほうが自然数の半分くらいの濃度になるかと思いきや、この場合も全単射が作ることができ対等になります。$f(x) = 2x$ がその全単射です。

同じように全単射を作ることで自然数 $\mathbb{N} = \{1,2,3,4,\ldots\}$ と正の奇数の集合 $\{2,4,6,\ldots\}$ も対等になります。

自然数 $\mathbb{N}$ と整数 $\mathbb{Z} = \{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$ の濃度を比較してみましょう。この場合、$\mathbb{N}$ から $\mathbb{Z}$ への写像として次のようなものを考えます。

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{2} & x \text{ が偶数のとき} \\ -\frac{x+1}{2} & x \text{ が奇数のとき} \end{cases}$$

この f は $\mathbb{N}$ から $\mathbb{Z}$ への全単射です。表 1 に x が 1 から 10 までのときに $f(x)$ がいくつになるかを示します。この $f(x)$ は $\mathbb{N}$ から $\mathbb{Z}$ への全単射の一例であ

表 1: $\mathbb{N}$ から $\mathbb{Z}$ への全単射 f

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\ldots$
$f(x)$	-1	0	-2	1	-3	2	-4	3	-5	4	$\ldots$

り、他にも全単射はつくることができます。自然数 $\mathbb{N}$ の濃度 $\aleph_0$ をもつ集合を可算集合といいます。可算集合には自然数の他に整数、有理数等があります。

可算集合の直積 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ の濃度はどうなるでしょうか？実は $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ の濃度は $\aleph_0$ であることが示せます。$\mathbb{N}$ から $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ への写像を次のように構成します。まず $n \in \mathbb{N}$ に対して $n = \frac{k(k-1)}{2} + r$, $k > 0$, $0 \leq r < k$ となる整数 k と r を見つけます。この k と r は n に対し一意に決まります。

$$f(x) = \begin{cases} (k-2, 0) & r = 0 \text{ のとき} \\ (r-1, k-r) & r \neq 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

とすると、$f(x)$ は $\mathbb{N}$ から $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ への全単射になっています。

[1] 私が初めてこの記号を知ったのは学生時代のときの永倉安二郎先生の位相の授業の時でした。
[2] ここでは自然数に 0 を含めないことにします。

同様に $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ の濃度も $\aleph_0$ であることが示せます。この場合は非負整数 $\mathbb{Z}^+$ から $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ への写像を考えます。$n\in\mathbb{Z}^+$ において $n=0$ のとき $k=r=0$ とし、$n\neq 0$ に対して $n=(2k-1)^2+r, k>0, 0\leq r<8k$ となる整数 k と r を見つけます。この k と r は n に対し一意に決まります。さらに $r=s(2k)+t, s\geq 0, 0\leq t<2k$ となる s と t を見つけます。これらも r に対して一意です。

$$f(x)=\begin{cases}(0,0) & n=0 \text{ のとき}\\ (k,-k+t) & s=0 \text{ のとき}\\ (k-t,k) & s=1 \text{ のとき}\\ (-k,k+t) & s=2 \text{ のとき}\\ (-k+t,-k) & s=3 \text{ のとき}\end{cases}$$

とすると、$f(x)$ は $\mathbb{Z}^+$ から $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ への全単射になっています。$\aleph_0=|\mathbb{Z}^+|=|\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}|$ となります。

3 実数の濃度

実数の濃度も自然数と同じように無限です。しかし、実数の濃度と自然数の濃度は違います。つまり、無限とひと言で言いますが、無限にも種類があるのです。

実数の濃度と自然数の濃度が違うことを示す前に、実数と同じ

非可算無限の濃度は、連続体の濃度ともよばれます。開区間 (a,b) の濃度は非可算無限です。たとえば (0,1) と実数の 1 対 1 対応は次のようなものが作れます。(0,1) から実数 $\mathbf{R}$ の関数として $y=\tan(\pi x-\pi/2)$ を考えます。これは開区間 $(0,1)$ から実数 $\mathbf{R}$ への全単射です。

濃度を違うことを示すためには、先にも述べましたが「2 つの集合が対等でないことを示すにはその 2 つの集合のどの写像も全単射になっていない」ことを示す必要があります。この「ない」ことを示すために背理法を使います。つまり、全単射があると仮定して、矛盾を導くのです。今回の実数と自然数の濃度が違うことを示すために自然数から実数への全単射があると仮定して矛盾を導きます。このときに対角線論法という方法を使います。

まず、自然数から実数への単射は $f(x)=x$ とすればよいので単射は存在します。つまり $\mathbb{N}\leq\mathbb{R}$ です。

先ほどの議論で、$(0,1)$ と実数には 1 対 1 の関係がありました。自然数と $(0,1)$ も 1 対 1 に対応付けられたとします。すると

自然数	区間 $(0,1)$ に含まれる小数
1	$0.a_{11}a_{12}a_{13}\ldots$
2	$0.a_{21}a_{22}a_{23}\ldots$
3	$0.a_{31}a_{32}a_{33}\ldots$
$\vdots$	$\vdots$

という無限に続く対応表が作れます。この表から次のような規則を考えます。

$$\begin{aligned} a'_{ii} &= a_{ii}+1 \quad 0 \le a_{ii} \le 8 \text{ のとき} \\ a'_{ii} &= 0 \qquad\quad a_{ii} = 9 \text{ のとき} \end{aligned}$$

この規則に基づいて次のような小数を作ります。$a = 0.a'_{11}a'_{22}a'_{33}\ldots$ a は $(0,1)$ 区間に含まれる小数ですが、先の対応表には現れません。なぜなら、対応表に現れるすべての小数の a_{ii} の値で異なるからです。この a のように対応表に現れない数があるということは、自然数と実数が 1 対 1 に対応する対応表が作れたということに矛盾します。ゆえに、自然数と区間 $(0,1)$ が 1 対 1 に対応付けられず、区間 $(0,1)$ の濃度が自然数の濃度より多いということになります。これにより実数の濃度が自然数の濃度より多いということになります。

以上の議論では厳密な議論がもう少し必要ですが、その部分は省いてあります。対角線論法の骨子としては上のような議論になります。

実数の濃度を $\aleph$ であらわし、連続体の濃度といいます。また $\aleph$ の濃度をもつ集合を非可算集合ともいいます。$\aleph_0 < \aleph$ です。

4 ベルンシュタインの定理

集合 A から集合 B への単射が存在すれば $|A| \le |B|$ であると先に述べました。では、集合 A から集合 B への単射が存在し、かつ集合 B から集合 A への単射も存在するならば $|A| = |B|$ になるでしょうか？有限集合なら明らかに成り立ちますが、無限の場合はどうでしょう。この問いに対して無限でも成り立つことを示したのがベルンシュタインの定理です。

ベルンシュタインの定理

集合 A から集合 B への単射が存在し、かつ集合 B から集合 A への単射が存在するならば

$$|A| = |B|$$

である。

証明は省きます。

余談ですが「集合 A から集合 B への単射が存在すれば $|A| \le |B|$ である」と同じように集合 A から集合 B への全射が存在すれば $|A| \ge |B|$ であることも成り立ちます。さらに「集合 A から集合 B への全射が存在し、かつ集合 B から集合 A への全射が存在するならば

$$|A| = |B|$$

である。」ということも成り立ちます。

5　べき集合の濃度

集合のべき集合とは集合の部分集合の集合です。集合 A のべき集合を 2^A と書くことにします。具体例を挙げます。集合 $A = \{a, b, c\}$ の場合 2^A は A の部分集合を要素とする集合なので $2^A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, A\}$ となります。集合 A が有限で $|A| = n$ のときに 2^A の濃度は 2^n になります。空集合 $\emptyset$ の場合に対するべき集合は $2^\emptyset = \{\emptyset\}$ になり、$|2^\emptyset| = 1$ です。べき集合については以下の定理が成り立ちます。

定理集合 A とそのべき集合 2^A に対して $|A| < |2^A|$ である。

これは無限集合に対しても成り立ちます。つまり、$|\mathbb{N}| < |2^{\mathbb{N}}|$ ですし、$|\mathbb{R}| < |2^{\mathbb{R}}|$ です。すると $|\mathbb{N}| < |2^{\mathbb{N}}|$ であり、$|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$ であったから $|2^{\mathbb{N}}|$ と $|\mathbb{R}|$ はどちらが大きいかということを疑問に思うかもしれません。実は $|2^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{R}|$ なのです。

証明は省きます。

さらに $|\mathbb{N}|$ より大きく $|\mathbb{R}|$ より小さい濃度をもつ集合は存在するかという問題が考えられます。このことは一般的な数学では証明も反証もできないことが証明されています。詳しくは連続体仮説について調べてみてください。