Nov., 7,2017
Oct., 18,2018
Yosuke KIKUCHI

離散数学　補助プリント

1. 集合 A と B が等しいことの証明

集合 A と B が等しいときに記号"=" を使って $A = B$ と書きます。集合は要素の集まりなのでこの $A = B$ が意味するのは A と B が同じ要素からなっているということです。つまり $A = B$ とは $A \subset B$ かつ $A \supset B$ が成り立つことなのです。ですので、$A \subset B$ かつ $A \supset B$ を示せば $A = B$ が示せます。

では $A \subset B$ を示すにはどうすればいいのでしょうか。$A \subset B$ は A が B の部分集合であるということなので、A のすべての要素が B の要素でもあるということです。つまり、任意の A の要素 a が $a \in B$ であることを示せばよいのです。具体的な証明を見ていくことにしましょう。

[例 1] $A \cap B \subset A$ の証明
$a \in A \cap B$ とする。これは $a \in A$ かつ $a \in B$ である。$a \in A$ であるので、$A \cap B \subset A$ である。

[例 2] $(A \cap B) \cup (A - B) = A$ の証明
(1)$(A \cap B) \cup (A - B) \subset A$ を示す。$a \in A \cap B \cup (A - B)$ とする。$a \in A \cap B$ または $a \in A - B$ である。ここで" または" とあるので、場合分けをして、(1-i) $a \in A \cap B$ のときと (1-ii) $a \notin A \cap B$ のときを考える。

(1-i) $a \in A \cap B$ ならば $a \in A$ かつ $a \in B$ であるので $a \in A$ である。

(1-ii)$a \notin A \cap B$ ならば $a \in A - B$ である。$a \in A$ かつ $a \notin B$ であるので、$a \in A$ である。

よって (1-i), (1-ii) いずれの場合も $a \in A$ となるので $(A \cap B) \cup (A - B) \subset A$ である。
(2)$(A \cap B) \cup (A - B) \supset A$ を示す。$a \in A$ とする。a は B に対して $a \in B$ または $a \notin B$ である。ここでも" または" とあるので、先ほどと同じように場合分けをする。(2-i) $a \in B$ のときと (2-ii)$a \notin B$ のときを考える。

(2-i) $a \in B$ ならば、$a \in A$ かつ $a \in B$ となり、$a \in A \cap B$ である。よって $a \in (A \cap B) \cup (A - B)$ である。

(2-ii) $a \notin B$ ならば、$a \in A$ かつ $a \notin B$ となり、$a \in A - B$ である。よって $a \in (A \cap B) \cup (A - B)$ である。

(2-i), (2-ii) いずれの場合も $a \in (A \cap B) \cup (A - B)$ となるので $(A \cap B) \cup (A - B) \supset A$ である。
(1), (2) から $(A \cap B) \cup (A - B) = A$ である。

みなさんにとって $(A \cap B) \cup (A - B) = A$ は直感的にわかると思いますが、なるべく詳しく証明を書くと上のようになります。

[例 3] 'de Morgan の法則' とは以下の等式のことです。

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

では、$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ の証明をみていきましょう。$x \in (A \cup B)^c$ とします。これは $x \notin (A \cup B)$ です。よって $x \notin A$ であり、$x \notin B$ です。$x \in A^c$ であり、$x \in B^c$ です。$x \in A^c \cap B^c$ となります。この証明は逆にもたどれます。つまり、$x \in A^c \cap B^c$ を仮定して $x \in (A \cup B)^c$ とできるので、$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ となります。

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

についても同様に示せます。
$x \in (A \cap B)^c$
$\Leftrightarrow x \notin (A \cap B)$
$\Leftrightarrow \neg(x \in (A \cap B))$
$\Leftrightarrow \neg((x \in A) \wedge (x \in B))$
$\Leftrightarrow \neg(x \in A) \vee \neg(x \in B)$
$\Leftrightarrow (x \notin A) \vee (x \notin B)$
$\Leftrightarrow (x \in A^c) \vee (x \in B^c)$
$\Leftrightarrow x \in (A^c \cup B^c)$
となります。

[例 4] 'de Morgan の法則' を拡張して以下が成り立ちます。

$$(A \cup B \cup C)^c = A^c \cap B^c \cap C^c$$

$$(A \cap B \cap C)^c = A^c \cup B^c \cup C^c$$

[例 5] 'de Morgan の法則' をさらに拡張して以下が成り立ちます。

$$\left(\bigcup_1^n A_i\right)^c = \bigcap_1^n A_i^c$$

$$\left(\bigcap_1^n A_i\right)^c = \bigcup_1^n A_i^c$$

2. $\emptyset$ と $\{\emptyset\}$ の違い

“$\emptyset$” は空集合を表す記号です。要素をもたない集合のことです。$\emptyset$ について以下のことが成り立ちます。

公理 任意の集合 S について $\emptyset \subset S$ である。

ここで注意したいのは $\emptyset \in S$ とは書かないということです。$\emptyset$ はあくまでも集合であり、要素ではありません。ですので、この場合には要素が含まれていることを表す記号 $\in$ を使って $\emptyset \in S$ と表記するのは間違いです。

でも、$\emptyset \in S$ と書く場合があります。それはどんなときでしょうか。すこし具体例で考えてみましょう。集合 $A = \{a, b, c\}$ としましょう。このとき、A の部分集合を要素とする集合を考えてみましょう。このような部分集合を要素とする集合をべき集合といいます。A のべき集合の記号をここでは $\mathcal{P}(A)$ と書くことにします (2^A と書くこともあります)。A に対して $\mathcal{P}(A)$ は $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$ となります。$\mathcal{P}(A)$ の要素をみると、$\emptyset$ だけ、“$\{,\}$” で囲まれていません。この $\mathcal{P}(A)$ にとって、A の部分集合である $\{a\}$ は $\mathcal{P}(A)$ の要素です。つまり、$\{a\} \in \mathcal{P}(A)$ なのです。A の部分集合である $\emptyset$ も $\mathcal{P}(A)$ の要素であるので、$\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ となるのです。

$\mathcal{P}_k(A)$ を、A の部分集合で要素数が k であるものの集合とします。すると $\mathcal{P}_2(A) = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$ となります。また、$\mathcal{P}_1(A) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$、$\mathcal{P}_3(A) = \{\{a, b, c\}\}$ となります。さらに $\mathcal{P}_0(A) = \{\emptyset\}$ となります。ちなみに $\mathcal{P}_4(A) = \emptyset$ です。

先ほどは集合 $A = \{a, b, c\}$ としましたが、集合 $B = \emptyset$ としたときの $\mathcal{P}(B)$ はどうなるでしょうか。このときの $\mathcal{P}(B)$ は $\mathcal{P}(B) = \{\emptyset\}$ となります。では、$\mathcal{P}(\mathcal{P}(B))$ はどうなるでしょう。このときは $\mathcal{P}(\mathcal{P}(B)) = \{\emptyset, \mathcal{P}(B)\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ となります。さらに $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(B))) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ になります。