

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで、問題冊子を開いて中を見てはいけません。
2. 答案用紙への学籍番号、名前などの記入は試験開始の合図があってから始めてください。
3. 試験時間は 9 時 00 分～10 時 30 分の 90 分です。
4. 問は問 1.～問 10. の 10 問あります。
5. 問題に関する質問にはお答えできません。文意どおり解釈してください。
6. 問題冊子の余白などは適宜利用して構いません。
7. 電卓は使用できません。
8. 答案用紙に学籍番号と名前のないものは採点されません。必ず学籍番号と名前を答案用紙の指定されている欄に記入してください。
9. 試験終了後、この問題冊子は持ち帰ることができます。
10. 答案用紙は白紙であっても提出してください。
11. 試験時間中に気分が悪くなったりした場合は、手を挙げて試験監督者に合図してください。
12. 採点は厳格に行います。文字、記号などははっきりと記入してください。
13. $\mathbf{R}$ は実数の集合, $\mathbf{Z}$ は整数の集合, $\mathbf{N}$ は自然数の集合を表します。また, $0 \in \mathbf{N}$ とします。

問 1. (5 × 2 点) 名簿 A には 37 名の学生が記載されている. 名簿 B には 36 名の学生が記載されている. 名簿 C には 29 名の学生が記載されている. 学生は 1 つ以上の名簿に記載されている. 学生の総数は 74 名である. 11 名の学生は A と B の両方の名簿に記載されている. 7 名の学生は B と C の両方の名簿に記載されている. 13 名の学生は A と C の両方の名簿に記載されている. このとき以下の条件を満たす学生数を答えなさい.

- (a) ちょうど 1 つの名簿に記載されている学生数 49 人
 (b) 名簿 A のみに記載されている学生数 16 人
 (c) 名簿 B のみに記載されている学生数 21 人
 (d) 名簿 C のみに記載されている学生数 12 人
 (e) 名簿 A または B(両方を含む) に記載されている学生数 62 人

問 2. (3 点) $S = \{1, 2, 3\}$ とする. S のべき集合 2^S のすべての要素を書きなさい. べき集合とは S の部分集合からなる集合である.

$$2^S = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, S\}$$

問 3. (7 × 3 点) R と S を集合 $A = \{1, 2, 3\}$ 上の以下の関係とする:

$$R = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}, \quad S = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$$

このとき以下の関係を求めなさい. ただし, $R \circ S \stackrel{\text{def}}{=} \{\langle a, c \rangle | (\exists b \in A)(\langle a, b \rangle \in S \wedge \langle b, c \rangle \in R)\}$ とする.

- (a) $R \cap S = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$
 (b) $R^C = \{\langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 2 \rangle\}$
 (c) $R^{-1} = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$
 (d) $R \circ S = \{\langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$
 (e) $S \circ R = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$
 (f) $S^2 = S \circ S = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$
 (g) $(R \circ S)^2 = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle\}$

問 4. (4 × 2 点) 関数となるものに○を, そうでないものに×を書きなさい.

- (a) $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = -x$ ○
 (b) $f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}, f(x) = -x$ ○
 (c) $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{Z}, f(x) = -x$ ○
 (d) $f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{N}, f(x) = -x$ ×

問 5. (3 × 2 点) 真理値表を完成させなさい.

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \rightarrow q$
0	0	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	1	0	0
1	1	1	1	1

問 6. (4 点) 命題 $p \rightarrow (q \wedge r)$ と命題 $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$ が同値であることを真理値表を使って示しなさい.

p	q	r	p	$\rightarrow$	$(q \wedge r)$	$(p \rightarrow q)$	$\wedge$	$(p \rightarrow r)$
0	0	0	0	1	0	1	1	1
0	0	1	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	0	0	0	1
1	1	0	1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1
			①	③	②	④	⑥	⑤

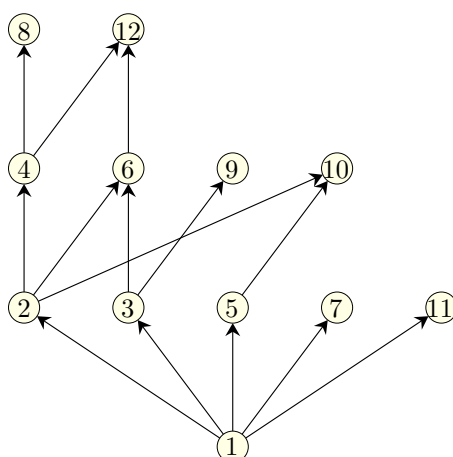
真理値表の③列と⑥列の真理値が一致するので $p \rightarrow (q \wedge r) \equiv (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$ である。

問 7. (4 点) 命題 $(p \wedge q) \rightarrow (p \leftrightarrow q)$ がトートロジー (恒真) であることを真理値表を使って示しなさい.

p	q	$(p \wedge q)$	$\rightarrow$	$(p \leftrightarrow q)$
0	0	0	1	1
0	1	0	1	0
1	0	0	1	0
1	1	1	1	1
		①	③	②

真理値表の③列の真理値が常に 1 となるので $(p \wedge q) \rightarrow (p \leftrightarrow q)$ はトートロジー (恒真) である。

問 8. (16 点) 順序集合 $O = (\{1, 2, 3, \dots, 12\}, |)$ について以下の設問に答えなさい. $a|b$ は「 a は b の約数」を表す.
 設問 1. O のハッセ図を描きなさい. (6 点)



設問 2. $\{1, 2, 3, \dots, 12\}$ の最小元を答えなさい. 存在しない場合は「存在しない」と答えなさい. (2 点) 1

設問 3. $\{1, 2, 3, \dots, 12\}$ の最大元を答えなさい. 存在しない場合は「存在しない」と答えなさい. (2 点) 存在しない

設問 4. $\{2, 3\}$ の上界をすべて答えなさい. 存在しない場合は「存在しない」と答えなさい. (2 点) 6, 12

設問 5. $\{3, 8\}$ の上界をすべて答えなさい. 存在しない場合は「存在しない」と答えなさい. (2 点) 存在しない

設問 6. $\{6, 12\}$ の下界をすべて答えなさい. 存在しない場合は「存在しない」と答えなさい. (2 点) 1, 2, 3, 6

問 9. (4×5 点) $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ とする. S 上の関係 R_0, R_1, R_2 を次のように定める.

$$R_0 = \{\langle x, y \rangle \mid y = x + 1\}$$

$$R_1 = \{\langle x, y \rangle \mid y = x - 1\}$$

$$R_2 = \{\langle x, y \rangle \mid y = x/2\}$$

このとき以下の設問に答えなさい. ただし, $R_i \circ R_j \stackrel{\text{def}}{=} \{\langle a, c \rangle \mid (\exists b \in S)(\langle a, b \rangle \in R_j \wedge \langle b, c \rangle \in R_i)\}$ とする.

設問 1. S を頂点とし, 辺 (弧) が R_0 で定められるグラフを描きなさい.

設問 2. S を頂点とし, 辺 (弧) が $R_1 \cup R_2$ で定められるグラフを描きなさい.

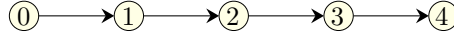


Figure 1: 設問 1 の解答

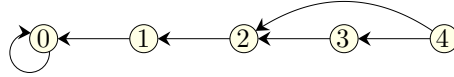


Figure 2: 設問 2 の解答

設問 3. S を頂点とし, 辺 (弧) が $R_1 \circ R_2$ で定められるグラフを描きなさい.

設問 4. S を頂点とし, 辺 (弧) が $R_1^+ = \bigcup_{k=1}^{\infty} (R_1)^k$ (R_1 の推移閉包) で定められるグラフを描きなさい.

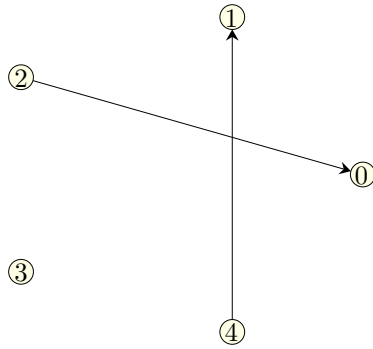


Figure 3: 設問 3 の解答

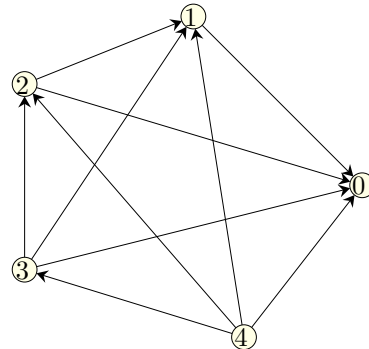


Figure 4: 設問 4 の解答

問 10. (8 点) T を完全 2 分木, T の葉を $b_1, b_2, \dots, b_n$ とし, b_i の深さ (根からの距離) を d_i とする ($1 \leq i \leq n$). このとき $\sum_{i=1}^n 2^{-d_i} = 1$ が成り立つ. この等式を利用して, $\max_{1 \leq i \leq n} d_i \geq \lceil \log_2 n \rceil$ が成り立つことを示しなさい.

解答例

$$\sum_{i=1}^n 2^{-d_i} = \frac{1}{2^{d_1}} + \frac{1}{2^{d_2}} + \frac{1}{2^{d_3}} + \dots + \frac{1}{2^{d_n}} = 1 \text{ で } \frac{1}{2^{d_i}} \text{ を } d = \max_{1 \leq i \leq n} d_i \text{ で置き換えると}$$

$$\frac{1}{2^d} + \frac{1}{2^d} + \frac{1}{2^d} + \dots + \frac{1}{2^d} \leq 1$$

となる. 左辺は $\frac{1}{2^d}$ が n 個あるので $\frac{n}{2^d} \leq 1$ となる. この式から $n \leq 2^d$ であり, 両辺の対数をとると $\log_2 n \leq d$ である. d は整数であることから

$$\max_{1 \leq i \leq n} d_i \geq \lceil \log_2 n \rceil$$

が成り立つ.