

問 1. $(-1, 1) \sim (0, 2)$ を示しなさい。

15

$$f: (-1, 1) \rightarrow (0, 2)$$

$$f(x) = x + 1$$

とすると f は全単射

$$\therefore (-1, 1) \sim (0, 2)$$

問 2. $(0, 1) \sim (0, 2)$ を示しなさい。

15

$$f: (0, 1) \rightarrow (0, 2)$$

$$f(x) = 2x \text{ とすると } f \text{ は全単射}$$

$$\therefore (0, 1) \sim (0, 2)$$

問 3. $(0, 1) \sim (-\infty, 2)$ を示しなさい。

15

$$f: (0, 1) \rightarrow (-\infty, 2)$$

$$f(x) = -\frac{1}{x} + 3 \text{ とすると } f \text{ は全単射}$$

$$\therefore (0, 1) \sim (-\infty, 2)$$

問 4. 対角線論法という言葉調べて、 $\mathbf{N}$ (自然数) と $\mathbf{R}$ (実数) が対等でないことを示しなさい。

15

・ $(0, 1) \sim \mathbf{R}$ を示してあること

・ $\mathbf{N} \not\sim (0, 1)$ を示してあること

$\mathbf{N} \not\sim (0, 1)$ のときに対角線論法を使う

以上の実を踏まえて採点します

問 5. $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{1+x} & x \geq 0 \\ -1 + \frac{1}{1-x} & x < 0 \end{cases}$ によってどのような集合どうしが対等であると示せるか、答えなさい。

20

$$\mathbf{R} \sim (-1, 1)$$

問 6. $(-1, 0] \cup (1, 2) \sim (0, 1)$ を示しなさい。

20

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & (x \in (-1, 0]) \\ \frac{1}{2}x & (x \in (1, 2)) \end{cases}$$

とすると $f(x)$ は $(-1, 0] \cup (1, 2)$ から $(0, 1)$ への全単射

$$\therefore (-1, 0] \cup (1, 2) \sim (0, 1)$$