

問 1. $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{v, w, x, y, z\}$ とする。

- (a) $f_1 = \{\langle a, v \rangle, \langle b, v \rangle, \langle c, x \rangle\}$
- (b) $f_2 = \{\langle a, x \rangle, \langle b, y \rangle, \langle c, w \rangle\}$
- (c) $f_3 = \{\langle a, x \rangle, \langle b, y \rangle, \langle c, w \rangle, \langle d, w \rangle\}$
- (d) $f_4 = \{\langle a, x \rangle, \langle b, y \rangle, \langle c, w \rangle, \langle d, v \rangle\}$
- (e) $f_5 = \{\langle a, x \rangle, \langle b, v \rangle, \langle c, z \rangle, \langle d, y \rangle, \langle d, w \rangle\}$
- (f) $f_6 = \{\langle a, z \rangle, \langle b, v \rangle, \langle c, w \rangle, \langle d, x \rangle\}$

設問 1. (a)~(f) の中から A から B への対応を選びなさい。

全部

設問 2. (a)~(f) の中から A から B への関数を選びなさい。

c, d, f

設問 3. (a)~(f) の中から A から B への単射を選びなさい。

d, f

問 2. $B = \{v, w, x, y, z\}$, $C = \{1, 2, 3, 4\}$ とする。

- (a) $g_1 = \{\langle v, 1 \rangle, \langle w, 1 \rangle, \langle x, 1 \rangle, \langle y, 1 \rangle, \langle z, 1 \rangle\}$
- (b) $g_2 = \{\langle x, 2 \rangle, \langle y, 3 \rangle, \langle w, 4 \rangle\}$
- (c) $g_3 = \{\langle v, 1 \rangle, \langle w, 2 \rangle, \langle x, 3 \rangle, \langle x, 4 \rangle, \langle y, 1 \rangle, \langle z, 2 \rangle\}$
- (d) $g_4 = \{\langle v, 1 \rangle, \langle w, 2 \rangle, \langle x, 3 \rangle, \langle y, 1 \rangle, \langle z, 4 \rangle\}$
- (e) $g_5 = \{\langle v, 1 \rangle, \langle w, 1 \rangle, \langle x, 1 \rangle, \langle y, 1 \rangle, \langle z, 1 \rangle\}$ ((a) と同じなので無視してください。)
- (f) $g_6 = \{\langle v, 1 \rangle, \langle w, 2 \rangle, \langle x, 1 \rangle, \langle y, 2 \rangle, \langle z, 1 \rangle\}$

設問 1. (a)~(f) の中から B から C への対応を選びなさい。

全部

設問 2. (a)~(f) の中から B から C への関数を選びなさい。

a, d, f

設問 3. (a)~(f) の中から B から C への全射を選びなさい。

d

問 3. 問 1. と問 2. を参考にして設問に答えなさい。

設問 1. 合成対応 $g_1 \circ f_1$ を書きなさい。

$g_1 \circ f_1 = \{\langle a, 1 \rangle, \langle b, 1 \rangle, \langle c, 1 \rangle\}$

設問 2. 合成対応 $g_4 \circ f_4$ を書きなさい。

$g_4 \circ f_4 = \{\langle a, 3 \rangle, \langle b, 1 \rangle, \langle c, 2 \rangle, \langle d, 1 \rangle\}$

設問 3. 合成対応 $g_i \circ f_j$ ($1 \leq i, j \leq 6$) で関数になっているものをすべて書きなさい。

$\rightarrow g_1 \circ f_3, g_2 \circ f_3, g_4 \circ f_3, g_6 \circ f_3,$

設問 4. 合成対応 $g_i \circ f_j$ ($1 \leq i, j \leq 6$) で全単射になっているものをすべて書きなさい。

$\downarrow$
 $g_4 \circ f_6$

$g_1 \circ f_4, g_4 \circ f_4, g_6 \circ f_4$

$g_1 \circ f_5, g_4 \circ f_5, g_6 \circ f_5,$

$g_1 \circ f_6, g_4 \circ f_6, g_6 \circ f_6$

問 4. 全射、単射、全単射の定義を何も見ないで書きなさい。

問1. $A = \{a, b, c, d, f, h\}$, $B = \{b, d, e, g\}$, $C = \{c, d, e, f\}$, $D = \{c, f, g\}$ とする。

(a) $A \cap B$ を求めなさい。

$$(A) A \cap B = \{b, d\}$$

(b) $A \cup B$ を求めなさい。

$$(b) A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$$

(c) $A \cup B \cup C$ を求めなさい。

$$(c) A \cup B \cup C = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$$

(d) $(C \cup D) \cap A$ を求めなさい。

$$(d) (C \cup D) \cap A = \{c, d, f\}$$

(e) $C \cup (D \cap A)$ を求めなさい。

$$(e) = \{c, d, e, f\}$$

(f) $A - D$ を求めなさい。

$$(f) = \{a, b, d, h\}$$

(g) $B \times D$ を求めなさい。

$$(g) D \times D = \{\langle b, c \rangle, \langle b, f \rangle, \langle b, g \rangle, \langle d, c \rangle, \langle d, f \rangle, \langle d, g \rangle, \langle e, c \rangle, \langle e, f \rangle, \langle e, g \rangle, \langle g, c \rangle, \langle g, f \rangle, \langle g, g \rangle\}$$

問2. α, β, γ を命題論理式とする。

(a) $\alpha \vee \beta = \beta \vee \alpha$ を真理値表を使って確かめなさい。

(b) $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma = \neg \alpha \vee (\beta \vee \gamma)$ を真理値表を使って確かめなさい。

問3. 問1. を参考にして設問に答えなさい。

設問1. $|A \times B|$ を求めなさい。

設問2. $|A \times C|$ を求めなさい。

設問3. $|A \times B \times C|$ を求めなさい。

問2 (a)

α	β	$\alpha \vee \beta$	$\beta \vee \alpha$
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	1

(b) は等しくありません

印刷ミスで $\neg \alpha \vee (\neg \beta \vee \gamma)$

となるはずでした。

すいません。

問3

$$|A \times B| = 6 \times 4 = 24$$

$$|A \times C| = 6 \times 4 = 24$$

$$|A \times B \times C| = 6 \times 4 \times 4 = 96$$

問 1. ド・モルガン則について

- (a) 集合におけるド・モルガン則を何も見ないで書きなさい。
(b) 論理におけるド・モルガン則を何も見ないで書きなさい。

問 2. 以下の関数が全単射であることを示しなさい。ただし、全単射でない場合もある。そのときは全射でない理由、単射でない理由を書きなさい。

(a) $f: \mathbf{N} \rightarrow \{0, 1\}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \text{ が偶数}) \\ 1 & (x \text{ が奇数}) \end{cases}$$

(b) $f: (0, 1) \rightarrow [0, 1]$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x = 1/2) \\ 1 & (x = 1/3) \\ 1/(k-2) & (x = 1/k \text{ かつ } k = 4, 5, \dots) \\ x & (x \neq 1/k, k = 2, 3, \dots) \end{cases}$$

問 3. 鳩ノ巣原理について

設問 1. 「13 人の人がいたら、同じ生まれ月の人が 2 人いる。」ことを示しなさい。

設問 2. 「25 人の人がいたら、同じ生まれ月の人が 3 人いる。」ことを示しなさい。

問 4. (おまけ) 8 人の人がクリスマスパーティをしました。パーティの最初に周りの人たちと乾杯でグラスを合わせました。各人が何人の人とグラスを合わせたのかは分かりません。このとき、「8 人の中に少なくとも、グラスを合わせた回数が同じ人が 2 人いる。」ことを示しなさい。

問 5. (おまけ) 「6 人の人が集まると、必ず 3 人の知り合いどうし 3 人の見知らぬどうしが必ずいる。」ことを示しなさい。ただし、知り合いには一方向の知り合いはないとする。例えば A さんが B さんを知り合いと認識していれば、B さんも A さんを知り合いと認識している。また A さんが B さんを見知らぬ人と認識していれば、B さんも A さんを見知らぬ人と認識している。そして、他人は必ず知り合いまたは見知らぬ人に分けられる。例えば A さんにとって B さんは知り合いまたは見知らぬ人のいずれか一方に分類されている。

問 2 (a) 全射だが、単射でない。

$$f(1)=1, f(2)=0 \text{ より全射}$$

$$f(2)=f(4)=0 \text{ より単射でない。}$$

(b) 全単射

$$f(x)=0 \text{ なら } x=\frac{1}{2} \in (0, 1)$$

$$f(x)=1 \text{ なら } x=\frac{1}{3} \in (0, 1)$$

$$f(x)=\frac{1}{k} \text{ なら } x=\frac{1}{k+2} \in (0, 1)$$

上記以外の $f(x)$ の値 a について $x=a$

より全射

$$f(x)=f(x') \text{ とする}$$

$$f(x)=0 \text{ なら } x=x'=\frac{1}{2}$$

$$f(x)=1 \text{ なら } x=x'=\frac{1}{3}$$

$$f(x)=\frac{1}{k} \text{ なら } x=x'=\frac{1}{k+2}$$

上記以外の $f(x)$ の値 a について

$$f(x)=a$$

$$x=a=f(x)=x'$$

より単射

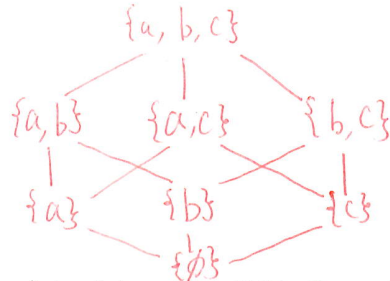
問3. 13人いて、同じ生まれ月の人がいなくとも、月には13必要となる。
よって矛盾。

25人いて、同じ生まれ月の人か3人いなくとも、月には12しかないの
で、同じ生まれ月の人か2人までならば24人までである。よって25人
いるので月か13必要となり、矛盾。

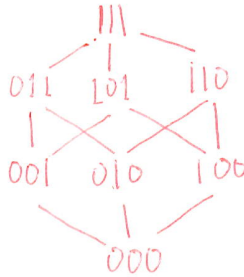
問4. 8人いるのでグラスを合わせた人数は0~7の8通りある。しかし
グラスを合わせた人数が0の人かいるとするとグラスを合わせた人数が7人の
人はいない。よってこのとき0~6の7通りとなる。同様にグラスを合わせた
人数が7の人かいると、1~7の7通りとなる。よって九鳥ノ巣原理に
より、8人の中に少なくとも、グラスを合わせた回数が同じ人が2人いる。

問5. 6人の中の1人を固定し、aさんとする。残り5人はaさんにとって知り合
い、見知らぬ人である。よって、知り合が3人以上、又は見知らぬ人が3人
2人以上のいずれかが成り立つ。一般性を失うことなく知り合が3人いるとする。
この3人をb, c, dとする。b, c, dが互いに見知らぬ3人どうしならば
命題が成り立つ。そうでないならばb, c, dのいずれか2人は知り合いである。
この2人とaを含めると知り合いどうしの3人組ができる。いずれにしても
命題が成り立つ。

問1. テキストの図 5.2 を参考にして $\langle 2^{\{a,b,c\}}, \subseteq \rangle$ のハッセ図を描きなさい。



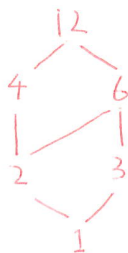
問2. n 桁の数 $a = a_0a_1 \cdots a_{n-1}$ と $b = b_0b_1 \cdots b_{n-1}$ において、 $a_i \leq b_i$ ($i = 0, 1, \dots, n$) であるとき $a \preceq b$ と定義する。例えば 4 桁の数 0213 と 1223 では $0213 \preceq 1223$ である。また、0213 と 1203 では $0213 \preceq 1203$ ではない。上記の例は桁数を固定すれば一般的に成り立つが、要素が多いと大変なので、 $\langle [2]^3, \preceq \rangle$ のハッセ図を描きなさい。 $[2]^3$ は 3 桁の 2 進数の集合とする。



問3. $a|b$ で a は b を割り切ることを表すとする。このとき、 $\langle \{1, 2, 4, 8, 16\}, | \rangle$ のハッセ図を描きなさい。



問4. 問3. を参考にして、 $\langle \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}, | \rangle$ のハッセ図を描きなさい。



問5. 問3. を参考にして、 $\langle \{1, 2, 3, \dots, 15\}, | \rangle$ のハッセ図を描きなさい。

