行列の共役類と2次形式の類数

SL(2,Z)の分類

$A \in SL(2, Z)$ SL(2,Z):整数の集合

A=$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$とすると

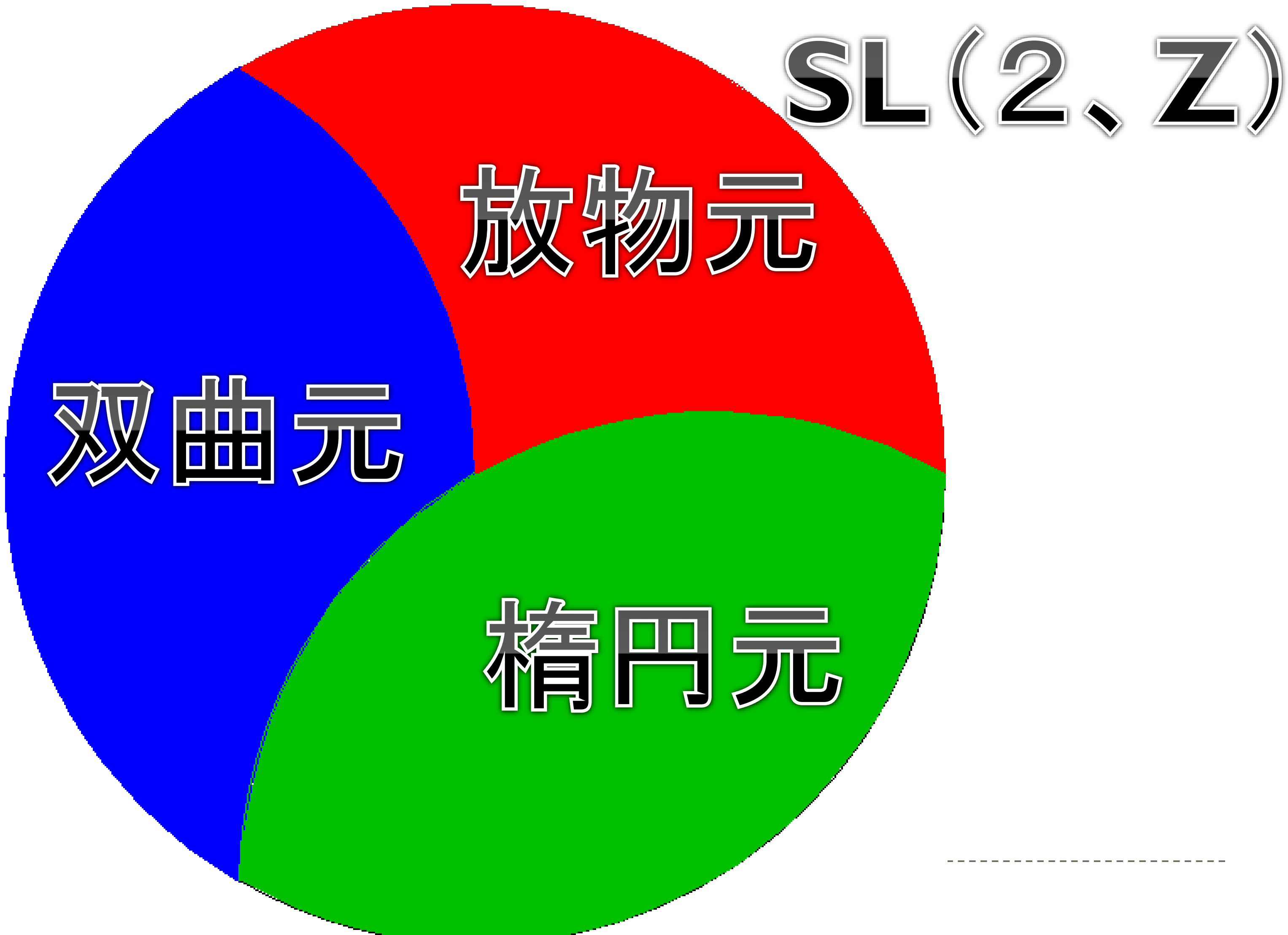
λ=$\frac{a+d \pm \sqrt{(a+d)^2-4}}{2}$

固有値はa+dによって決まる

SL(2,Z)の分類

- $|a+d|<2$のとき異なる2つの虚数解をもつ
  →楕円元
- $|a+d|=2$のとき重解をもつ
  →放物元
- $|a+d|>2$のとき異なる2つの実数解をもつ
  →双曲元

SL(2,Z)の分類



行列の共役類

{A}={$P^{-1}AP|P \in SL(2,Z)$}
これをAの共役類という

$$P = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

としたとき$P^{-1}AP$は

$$P^{-1}AP$$
$$= \begin{pmatrix} a\alpha\delta - c\alpha\beta + b\gamma\delta - d\beta\gamma & a\beta\delta - c\beta^2 + b\delta^2 - d\beta\delta \\ -a\alpha\gamma + c\alpha^2 - b\gamma^2 + d\alpha\gamma & -a\beta\gamma + c\alpha\beta - b\gamma\delta + d\alpha\delta \end{pmatrix}$$

とあらわされる

特別な共役類

A_0=$\begin{pmatrix} m_0 & l_0 \\ l_0+2 & m_0 \end{pmatrix}$ $l_0=m_0-1$ m_0: 奇数

A_0は双曲元($|a+d|=2m_0>2$)

$\{A_0\}$=$\{P^{-1}A_0\mathrm{P}|\alpha,\beta,\gamma,\delta\in Z,\alpha\delta-\beta\gamma=1\}$

$$P^{-1}A_0P$$
$$=\begin{pmatrix} m_0-(\alpha\beta-\gamma\delta)l_0-2\alpha\beta & (\delta^2-\beta^2)l_0-2\beta^2 \\ (\alpha^2-\gamma^2)l_0+2\alpha^2 & m_0+(\alpha\beta-\gamma\delta)l_0+2\alpha\beta \end{pmatrix}$$

特別な共役類

$$B_0=\begin{pmatrix} 2 & 4m_0-5 \\ 1 & 2m_0-2 \end{pmatrix}$$

$trA_0 = trB_0 = 2m_0$ (双曲元)

A_0とB_0は等しい固有値をもつ

A_0とB_0は共役?

$P^{-1}A_0P = B_0$
が成り立てば共役

(1,1)成分に注目すると
$P^{-1}A_0P_{(1,1)} =$ 奇数
$B_{0(1,1)} =$ 偶数

よって
B_0とA_0は共役でない

2次形式の同値類

- $a, b, c \in \mathrm{Z}$,変数x, yに対し

$$\mathrm{f}(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$$

を“２元２次形式”という

（ここでのa, b, cは形式の係数と呼ぶ）

またここでは2元形式のみを考えるため

“２元”を省略した“２次形式”と呼ぶ

- もう一つの２次形式

$\mathrm{f}'(x,y) = a'x^2 + b'xy + c'y^2$ が

“$\alpha, \beta, \gamma, \delta \in Z$, $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$”を満たす

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$を使い$a', b', c'$を次のように表す

時“f’とfは同値であるという

$$a' = a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2$$
$$b' = 2a\alpha + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + 2c\gamma\delta$$
$$c' = a\beta^2 + b\beta\delta + c\delta^2$$

また、この同値関係で2次形式の集合を
同値類に分けることにする

- $f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$に対し
  “$D=b^2-4ac$”をfの判別式という

<u>事実</u>

与えられた判別式をもつ２次形式の同値類は有限個であることが知られている

これを２次形式の<u>類数</u>と呼び$h(D)$とかく

行列の共役類と2次形式の類数

事実

ある固有値をもつ双曲元の共役類と

ある判別式Dをもつ2次形式の同値類が

対応している

- 先ほど考察した行列A_0と行列B_0に対し
  その共役類$\{A_0\}, \{B_0\}$に対応する2次形式の
  同値類を作ったとすると
  <u>A_0とB_0は共役ではなかった</u>

⇒そのため2次形式の同値類は異なる

よって　　$h(D) \geq 2$が示せる

まとめ

２次形式の<u>類数$h(D)$</u>は、非常に重要であるため$h(D)$に対してある結果を導くことは、意味があるといえる