皿回しの力学

Mechanics of rotating disk

メンバー　原田　峻多，槇橋　弘晃，花田　知佳

概要　皿回しの回転運動をコマの運動の一種ととらえ、定常的な回転を力学モデルで表し、理論的に解析した。回転速度と水平からの傾きの関係を求めて、ビデオ解析から得た値と比較し、現実をよく再現していることを確認した。皿回しの棒が中央による現象についても定性的に説明した。

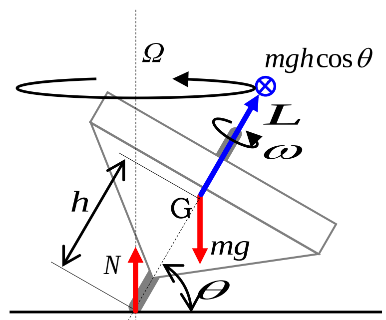
はじめに

チャレンジゼミナール科目を受講するメンバーで，戸田盛和著「コマの科学」を参考にコマをメインテーマにさまざまな回転体について継続的に調べている。今年は昨年の先輩方の成果を受けて，解析手法の有効性を確認し，さらに精密にする目的で皿回しの解析に挑戦することにした。

まず，回転運動解析の基本となるコマの歳差運動について簡単に触れる．図1のように傾いて回転するコマは重力によるトルクで角運動量Lの向きが変化し，軸が歳差運動をする．その角速度Ω は，トルクの大きさと，角運動量の逆数に比例する．

コマの場合，回転軸と角運動量の方向が一致しているので分り易いが，円板や円柱の回転では，回転軸と角運動量の向きがずれており，トルクも回転に伴い変化する．これを考慮して回転体に固定した座標系を用いて，円柱と円板の回転運度の特徴を説明することに成功した．しかし，ビデオ解析による回転数と回転軸の傾きの関係との一致が芳しくなく，さらなるモデルの改良が必要である．

本報告では，解析対象に回転運動としてさらに複雑と思われる皿まわしを取り上げ，解析手法の有効性と精密化を試みる．



$$\left\{\begin{aligned} L &= I\omega \\ T &= \frac{2\pi L\cos\theta}{mgh\cos\theta} \\ \Omega &= \frac{mgh}{L} \end{aligned}\right.$$

図1 コマの歳差運動

皿まわし

支持棒の先端が引っ掛かる縁を持ったプラスチックの円板（皿）を一定の速度で回転させ続けている状態で，回転速度と水平からの傾きの関係をモデル計算とビデオ解析による実測で比較する．

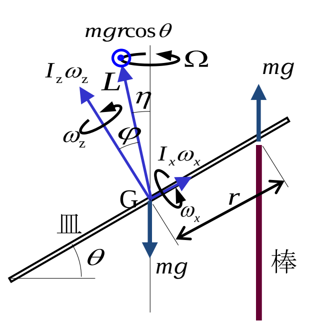
力学モデルを図2に示す．計算を容易にするため，棒は垂直の状態で回転し，太さはないとする．また，皿は重心回りに回転していると仮定する．

計測

デジタルカメラで動画撮影し，PC上でコマ送り再生して皿の水平からの角度と回転速度を求める．棒が左右の端に位置し皿を真横から見るフレーム（図3）で半周期の時間を確認し，角度は背景の垂直なラインをもとに下の写真 に示すような2枚のフレームの平均を用いた．

材質と形状の異なる2つの皿について回転速度Ω（RPS）と傾斜角θ（deg）の関係を計測した．

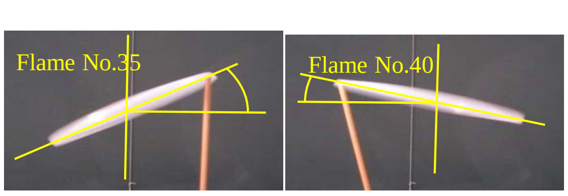
皿の慣性モーメントは，ガラス糸の先に試料を吊り下げた，ねじり振子の振動周期から求めた（測定の詳細はゆで卵のグループの報告を参照）．



$$\left\{\begin{aligned} L &= \sqrt{(I_x\omega_x)^2+(I_z\omega_z)^2} \\ \tan\varphi &= \frac{I_x\omega_x}{I_z\omega_z} \\ \omega_x &= \Omega\sin\theta \\ \omega_z &= \Omega\cos\theta \\ \frac{2\pi L\sin\eta}{mgr\cos\theta} &= \frac{2\pi}{\Omega} \\ \eta &= \theta-\varphi \end{aligned}\right.$$

$$\Omega^2 = \frac{mgr}{\left({I_x}^2\tan^2\theta+{I_z}^2\right)^{\frac{1}{2}}\sin\left(\theta-\tan^{-1}\frac{I_x}{I_z}\tan\theta\right)}$$

図2 皿まわしの力学モデル



Δt = 1/29 fps×5 flames
=0.17s

図3 皿まわしの回転速度と傾斜角の測定（写真は皿A）

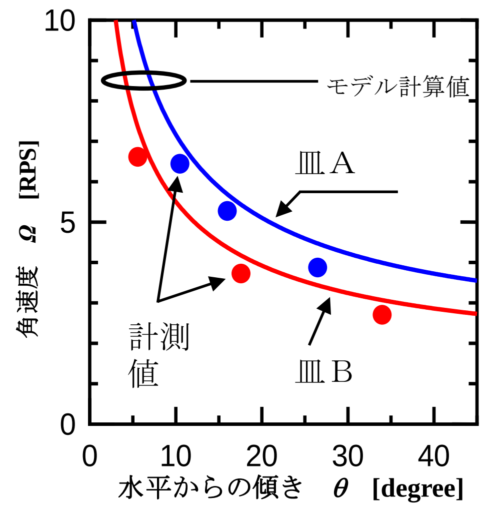


図4 皿まわしの回転速度と傾斜角の関係
（実線はモデル計算値，点は実測値）

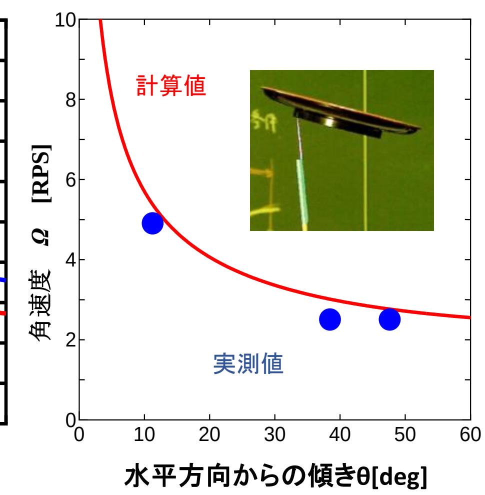


図5 皿まわしの回転速度と傾斜角の関係
（針先で回した場合）

結果と考察

ビデオ解析から得た回転速度W（RPS）と傾斜角q（degree）の関係（点）を図4のグラフに計算結果（実線）と比較して示す．図4について，計算結果は実測した値を良く再現している．しかし，2つの皿のどちらについても実測した値より回転数が高く計算される傾向がある．

このずれの原因として，皿の半回転を棒の位置で判断しているために，棒の太さの分だけ皿の回転速度を小さく見積もっていることが考えられる．棒の太さの影響がないように棒の先端に針を取り付けて，皿Bについてもう一度計測実験を行った．図5のグラフに計算結果(実線)と実測値(点)を比較して示す．

先端に針を取り付けて行った実験の結果は，図4の針のない実験と同様になった．したがって，棒の太さを無視したことによるずれではなく，もっと他に影響のある原因が存在すると考えられる．

よって，計算のモデルをより現実に近づけることが必要で，たとえば，皿の重心の回転運動を考慮することでより現実に合ったモデルにすることができると思われる．フラフープの解析では重心の回転を考慮したモデルを使っているのでその手法を取り入れて解析することを次の取り組みとしたい．

おまけ

実際に皿まわしをしていると，面白い現象が起こる．回転数を上げて皿がほぼ水平になると，棒が皿の中央に自然に寄ってくるのである．この現象はちょっとした棒の操作で出来たり，出来なかったりと条件を把握することが難しかった．棒の太さや材質，先端形状などを変えて試した結果，次のような機構ではないかと推測している．

図6は，皿を上から見た図で，皿に固定した回転座標系で描かれている．棒の接点が皿に対して滑らない状態で回転を加速すると棒がしなり，接点がAからBに移動し，棒は内側へ転がる．これが高速に皿を回した際に棒が皿の中央に自然に寄る原理である．この仕組みを理解したうえで皿回しを行うと棒を中央に寄らせることが容易になった．棒を中央に寄せるには，棒は皿の重量を支える剛性を持ちながら，かつしなやかで，先端はある程度太いことが必要な条件である．しならないアルミパイプ，先端の尖った棒ではこの演技はし辛い．

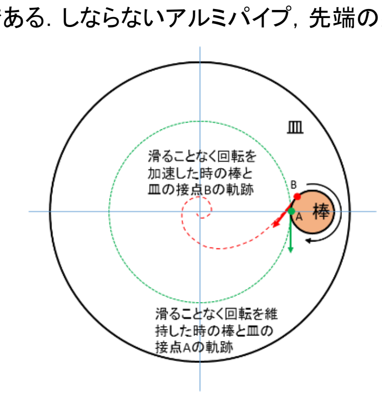


図6 棒が中央に寄るしくみ

感想

初めはまさかコマの原理が皿回しに応用されているとは思わなかったので驚いた．実験中では皿を一定速度で回し続けるという作業が必要とされたため，まず皿を回せるようになることからこの研究は始まった．実際に皿を回しながら正確に計測していくという作業はなかなか面倒で大変だった．解析を進めるにしたがって次々と生じた問題を一つずつ解明していき，ようやくここで報告するレベルにたどり着くことが出来た．しかし，上記のように課題は残されている．研究を引き継いでくれる次の3年生の奮闘に期待したい．

最後に：皿回しに興味を持った方は，ぜひ挑戦してみてほしい・・・・・・