



卵が立つメカニズム

有井峻(M)、小林靖幸(M)、殿岡希望(M)、古谷嘉偉(E)、船曳裕也(S)

概要：昨年度の先輩達の研究テーマであった回転ゆで卵の立ち上がりを引き継いで研究してきた。昨年の説明では摩擦の向きについて不明な部分があった。3Dプリンターで卵の模型を作製し、調べたところ、立ち上がるものと立ち上がらないものがあることが分かった。その違いの理由を考察する中で、卵が立ち上がるメカニズムについて昨年より合理的な説明に成功した。

回転する卵型模型

はじめに

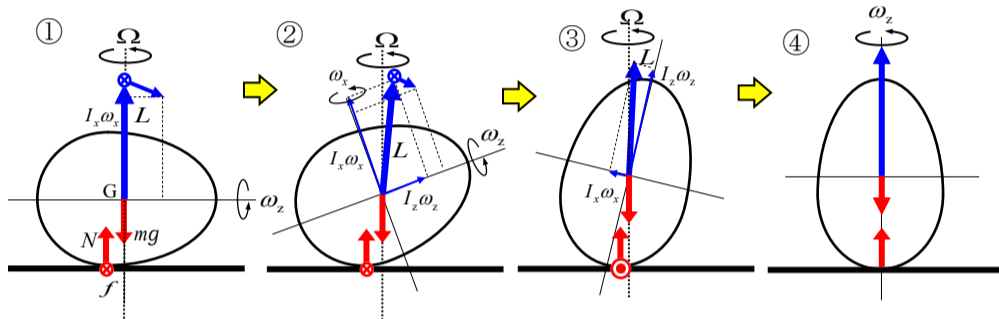
回転するゆで卵の立ち上がりについては、2004年にNatureに掲載された英ケンブリッジ大Moffat教授の論文のなかで、Jellet定数(軸対称回転体の重心高さと同軸回転エネルギーの積)が保存されるため摩擦で回転が減少すると重心が上がり卵が立ち上がると説明されている。

この説明は解析力学に基いた計算のため直感的に理解することが難しい。高専3年生レベルの物理の知識でも納得出来るような簡単な説明を求めて昨年度より取り組んでいる。

卵の立ち上がりの昨年度の説明

卵の長軸をz軸、それに直交した軸をx軸とする。

- ①卵を水平にx軸まわりに回転させると角運動量Lの向きは上向きである。卵は重心回りに回転するので床との接点がずれた状態になり、x軸回りの回転により卵と地面の接点に動摩擦力fが働く。この摩擦によりz軸回りに回転させるトルクが発生する。その結果x軸回りの角運動量が減少し、z軸回りの角運動量が増加する。
- ②重力によるトルクが原因で歳差運動をする。この歳差運動に対応する角運動量の垂直軸からの傾きφは、重力によるトルクと関係している。x軸方向の角運動量が減り、z軸方向の角運動量が増加するため、全体のLが上向きのまま(理由不明)であれば卵のz軸の傾斜角θが増加する。
- ③ある程度角度まで立ち上がると、通常のコマと同じように床との接点から今度はz軸まわりの回転を止める向きの摩擦を受け、これが回転軸(z軸)を直立させるトルクを発生する。
- ④完全に直立すれば床から受ける力によるトルクは受けず、安定して回転する。



卵の立ち上がりの昨年度の説明

昨年の説明の問題点

- 1) 明らかにトルクがはたらいっているにもかかわらず、全体の角運動量Lが上向きのままで維持される理由が不明。
 - 2) 上記の回転卵が立つメカニズムの説明では全ての卵が立ち上がることになる。しかし、勢いよく回しても直立しないものがある。
 - 3) 立ち上がる途中で滑り摩擦の向きが逆転する。摩擦が0では軸の立ち上がりが止まるので、このポイントを超えて直立する理由が不明。
- これらの残された問題を考察する。

今年度の取り組み

1) 全体の角運動量Lが上向きのままで維持される理由

摩擦によるトルクの水平成分は卵が一回転すると平均は0になるので、全体の角運動量の向きは傾くことなく常にほぼ上を向いた状態が保持されると考えられる。

2) 立ち上がらない卵が存在する理由

これは3)の疑問とも関係する。立たない卵の回転は昨年度のチャゼミで解析された円柱の回転によく似ていることに気が付いた。円柱の回転でもどんなに勢いよく回しても傾斜角がある角度以上にならないことが分かっている。

卵の場合も円柱の回転の解析と同じ手順で、床との接点が滑らない条件、すなわち転がっている状態で静止摩擦のみが存在する条件で、軸の傾きと力学的エネルギーの関係を求めた。その結果、立たない卵ではある角度で力学的エネルギーが発散している可能性が見えてきた。

計算に用いた関係式

各軸まわりの角速度 ω_x , ω_z と歳差運動の角速度 Ω の関係

$$\omega_z = \Omega \sin \theta + \omega \quad \omega_x = \Omega \cos \theta$$

床との接点が滑らずに転がる条件(滑り摩擦fがない条件)

$$R\Omega = r\omega$$

各軸まわりの角運動量と全体の角運動量の関係

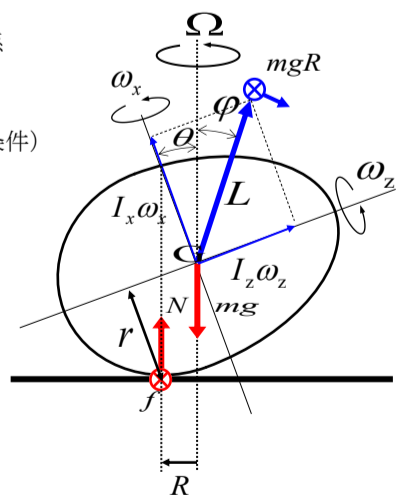
$$L^2 = I_x^2 \omega_x^2 + I_z^2 \omega_z^2$$

幾何学的関係(φは角運動量の垂直軸からの傾き)

$$\tan(\theta + \varphi) = \frac{I_z \omega_z}{I_x \omega_x}$$

歳差運動の周期

$$\frac{2\pi L \sin \varphi}{mgR} = \frac{2\pi}{\Omega}$$



卵の回転モデルと計算に用いた記号

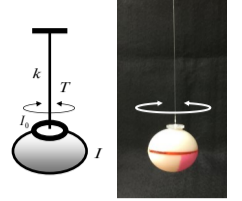
計算結果

$$\text{歳差運動の回転角速度} \quad \Omega^4 = \frac{(mgR)^2}{\left[I_x^2 \cos \theta + I_z^2 (\sin \theta + R/r)^2 \right] \sin^2 \left[\tan^{-1} \frac{I_z (\sin \theta + R/r)}{I_x \cos \theta} - \theta \right]}$$

$$\text{力学的エネルギー} \quad E = \frac{1}{2} I_x \omega_x^2 + \frac{1}{2} I_z \omega_z^2 + mgh$$

慣性モーメントの測定は測定対象物を右の写真のようにテグスの先に吊り下げてねじり振動の周期Tから求めた。取り付け部品の慣性モーメントを I_0 とすると、被測定物の慣性モーメントIは右式により求まる。kはテグスのねじりばね定数。

$$I = \frac{kT^2}{4\pi^2} - I_0$$



卵型模型による傾斜角と力学的エネルギーの計算

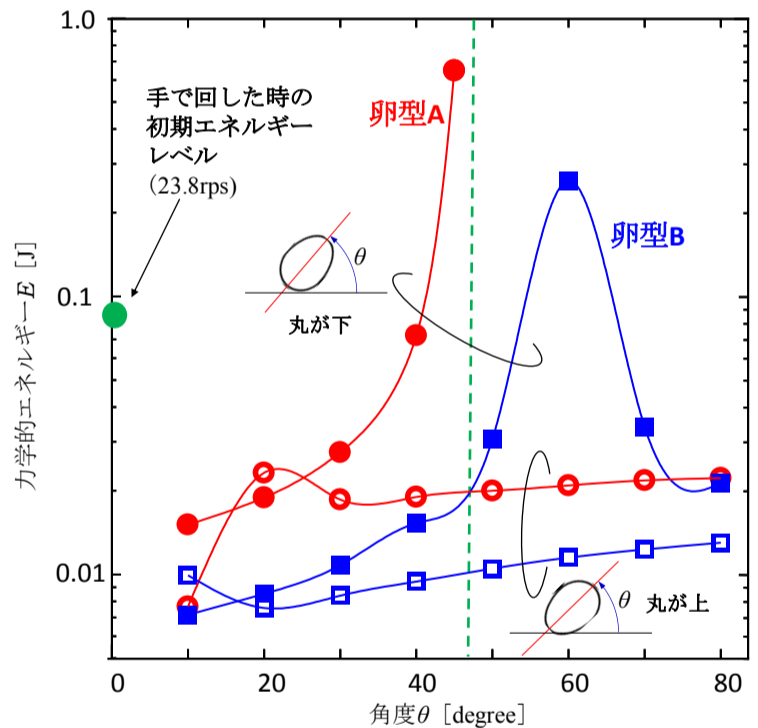
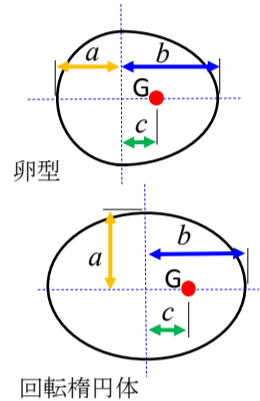
二つの卵型模型を3Dプリンターで製作した。卵型模型Aは丸い方が下側では立たない。尖った方を下側にした状態では立つ。卵型模型Bでは両方とも立つ。下の表1は製作した模型の寸法や慣性モーメントを記した表である。下の表で分かるようにAとBでは質量が違うだけで重心位置など形状的には大きな差がない。

2つの卵型の回転の違いを調べるため形が明確な回転楕円体を作製し重心位置を変えて調べることにした。作製した回転楕円体1, 2, 3の諸特性を表に示す。重心が中心からもっとも離れた3だけが重心を下の状態でも直立しないことが分かった。

卵型A, Bについて、転がる条件での力学的エネルギーEの卵のz軸の傾斜角θとの関係を卵の形状をCAD図面から読み取って10度毎に計算した。結果を下のグラフに示す。

表1 卵型模型のデータ

卵型	m [g]	a [mm]	b [mm]	c [mm]	$I_x \times 10^{-6}$ [kgm ²]	$I_z \times 10^{-6}$ [kgm ²]	直立するかどうか	
							丸が下 or 重心上	丸が上 or 重心下
A	39.8	20.0	28.0	3.7	7.70	6.10	○	×
B	19.2		33.0	4.5	4.81	3.82	○	○
回転楕円体	1	33.0	28.5	0	5.97	4.37	○	○
	2	32.8		1.9	6.17	4.23	○	○
	3	33.8		5.6	7.12	4.30	○	×



転がり条件での卵型A,Bのz軸の傾斜角と力学的エネルギーの関係

結果と考察

直立しない卵型模型Aで丸い方が下の場合のみ、エネルギーが発散する角度があるらしいことが分かった。したがって、最初に水平状態でどんなに勢いよく回転させても、回転エネルギーを失いながら傾斜角が増加して、転がり状態になるとそれ以上角度が増えなくなると思われる。立ち上がる角度の上限は計算上45度付近となる。実際、卵型Aの角度はその付近までしか上昇しない。

卵型模型Bでは60度付近に山がみられるがピークの値は高くなく初期エネルギーが十分大きければ直立するまで滑り摩擦がz軸の回転を増す方向に維持されると思われる。

力学的エネルギーが発散する条件では、角運動量の向きがほぼ真上を向いて歳差運動をしていることになり、そのためには角運動の大きさが発散しなくてはならなくなる。つまり、角度φが0になることを意味する。

手で勢いよく回したときの初期エネルギーを高速度ビデオの解析から求めると0.1J程度と推定された。上のグラフに緑の点でプロットした。この初期エネルギーでは卵Bも立たないことになる。実際には立つので、エネルギーの計算に何か間違いがあるものと思われる。

まとめ

この研究で、昨年度の説明での3つの疑問を解決し、立つ卵と立たない卵の違いを明らかにし、卵が立つ理由についての説明に成功した。

今後、回転楕円体も含め、卵型模型について、傾斜角と力学的エネルギーの関係を連続的に算出しエネルギーの発散の仕方を詳細に調べ、上記の推測を確認したい。

参考文献

- 1) 下村 裕, 『ケンブリッジの卵 - 一回る卵はなぜ立ち上がりジャンプするのか -』, 慶應義塾大学出版会, 2007
- 2) 戸田盛和, 『コマの科学』, 岩波書店, 1980