高校地学で分かる食連星の物理量

機械工学科3年　石橋　尚也
電気電子工学科3年　蛭子　智貴
情報工学科3年　箭内　風海

目的

食連星の測光観測と分光観測により物理量を引き出したい。

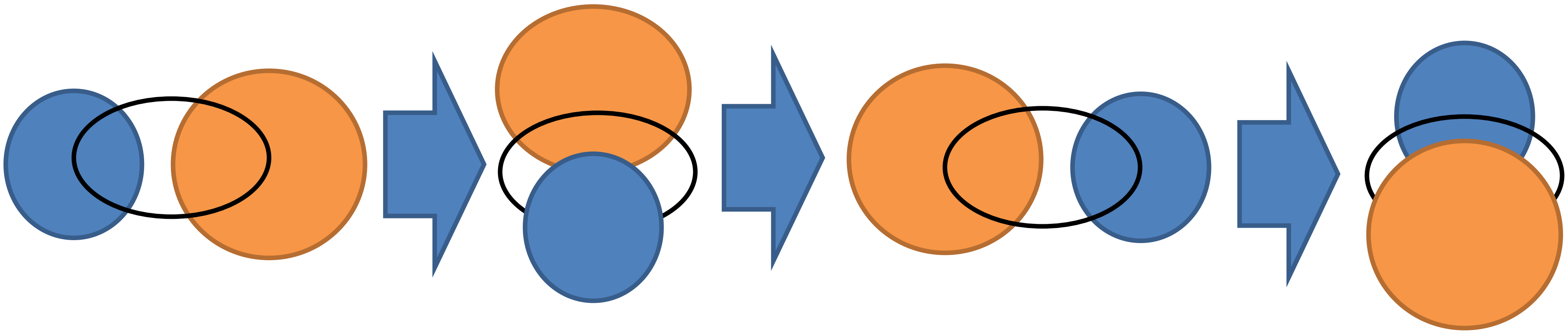
全国的に地学を履修する高校生は多くないが、その地学の「恒星の大きさ」「連星とその質量」「質量光度」関係などの知識により引き出せる物質量を調べる

また、美星天文台で観測したデータから、具体的な物質量の吟味を試みる。

食連星(V0523 Cas)の観測結果から半径比、温度比を導出する。

高校地学で分かることを使って食連星を考察しよう！！

食連星とは？



極大　　主極小　　極大　　副極小

$$R_1 > R_2\,, T_1 > T_2\,, v_1 < v_2$$

求めることができる物理量

○測光観測

重心の周りの周期

角速度

温度比

半径比

○分光観測

それぞれの星の軌道速度

連星の質量比

連星の共通の重心からのそれぞれの距離

二つの星の間の距離

それぞれの星の質量

○恒星の一般的特性

輝度

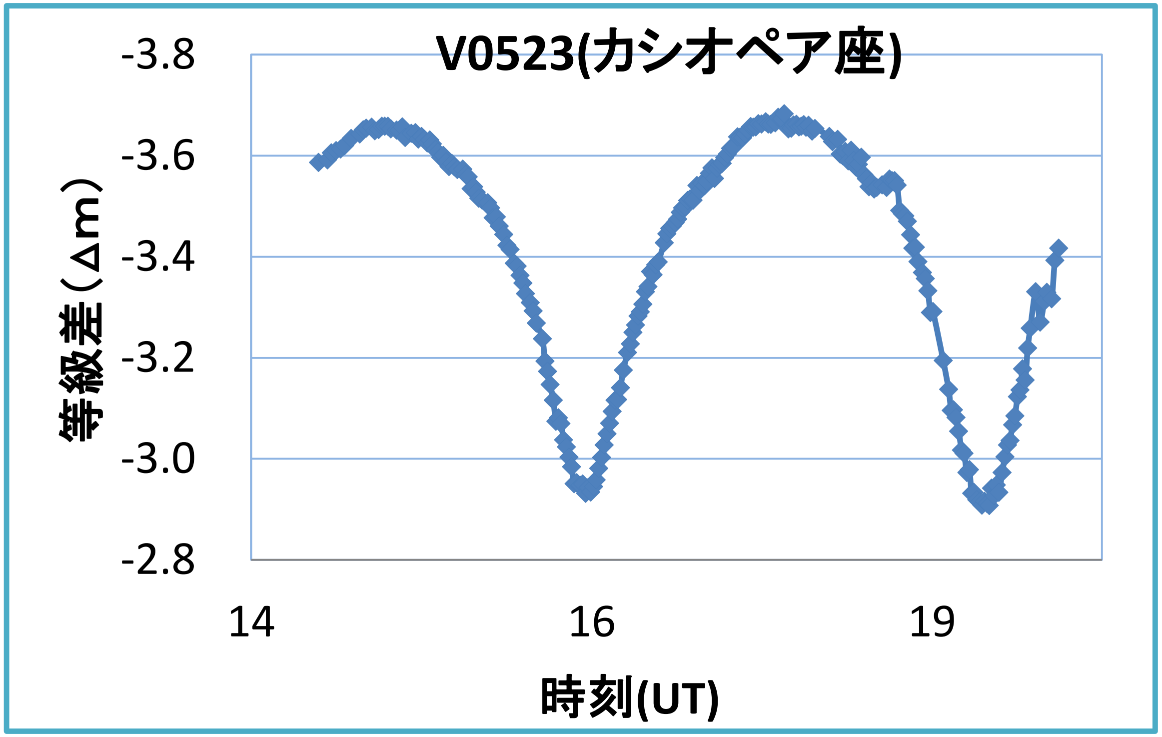
連星と地球の間の距離

2つの星の視差

最小の望遠鏡の口径

〇連星の測光観測

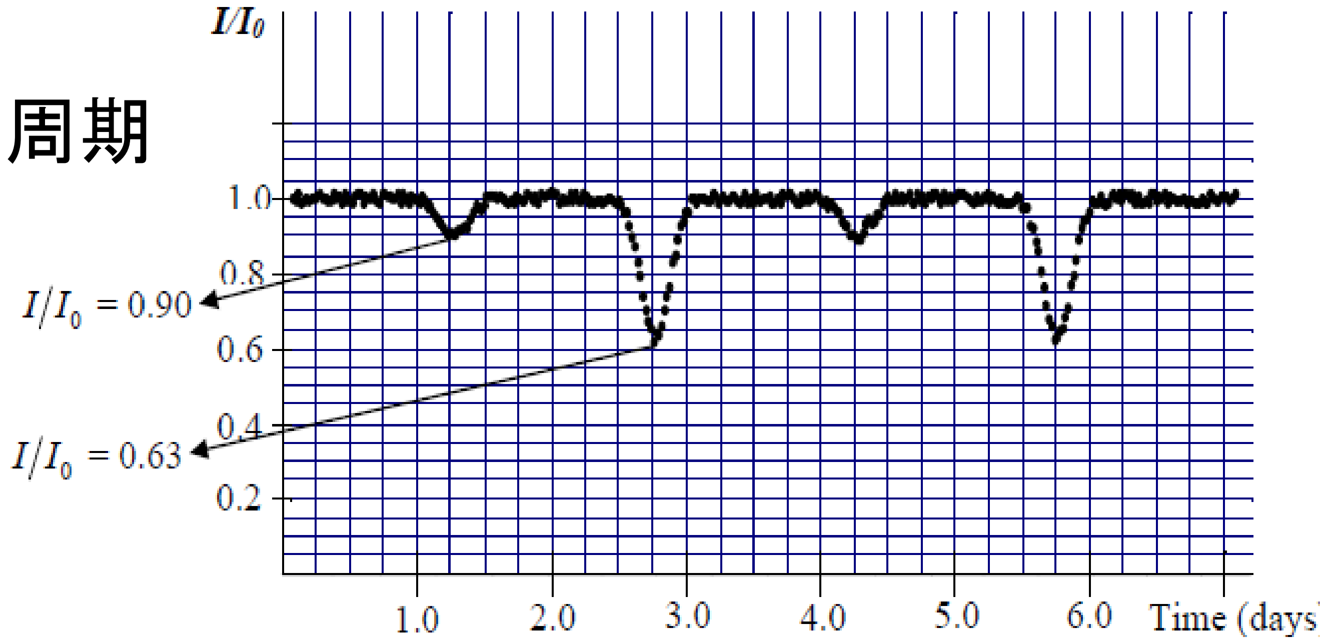
測光観測とは？



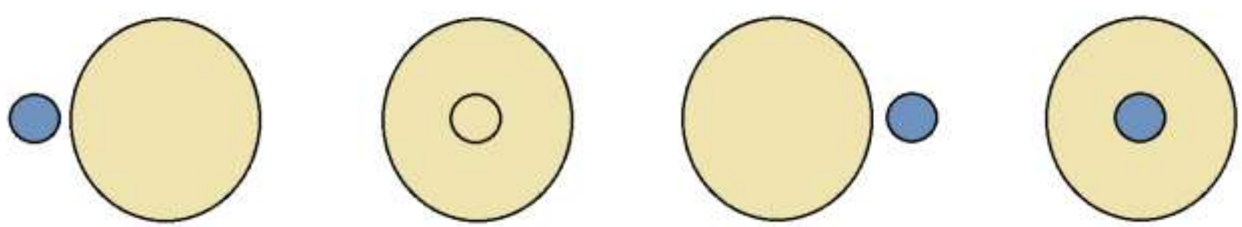
・天体の明るさを測定する観測
・測光観測を時間的に継続すると天体の明るさの時間変化がわかる

測光観測から分かる物理量

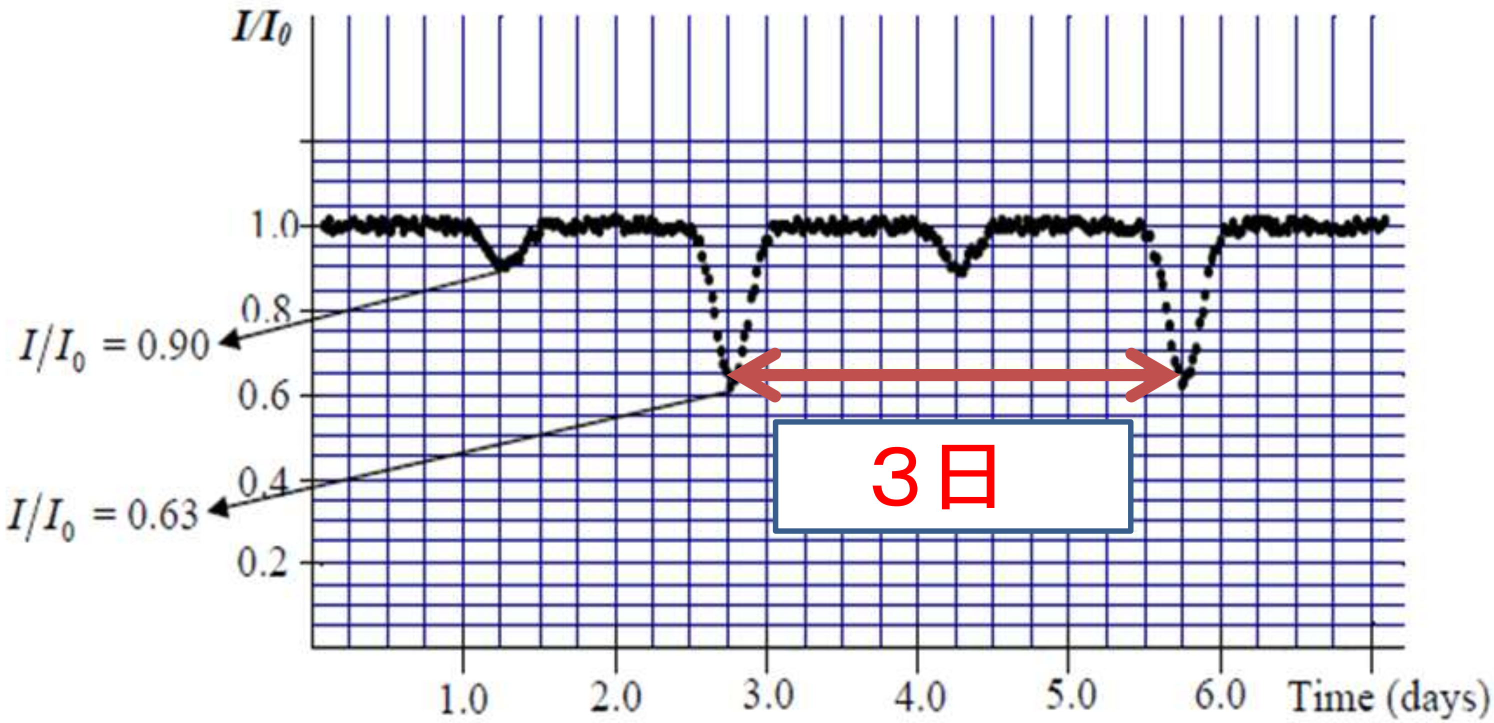
- 重心の周りの周期
- 角速度
- 温度比
- 半径比



第38回国際物理オリンピック2007　イラン大会　pink問題より



重心の周りの周期と角速度

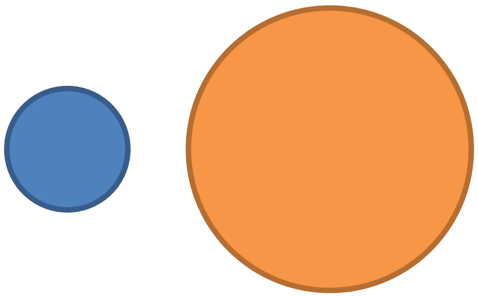


$$3days = 2.6 \times 10^5 [s]$$

$$2.6 \times 10^5 = \frac{\omega}{2\pi} \quad \Rightarrow \quad \omega = 2.42 \times 10^{-5} \left[{}^{rad}/{}_{s}\right]$$

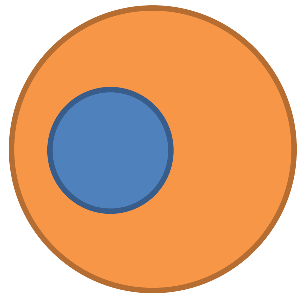
半径比と温度比

極大



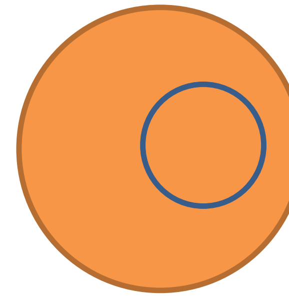
$$i_0 = k\left(\pi {R_1}^2 {T_1}^4 + \pi {R_2}^2 {T_2}^4\right)$$

主極小



$$i_2 = k\left\{\pi\left({R_1}^2 - {R_2}^2\right){T_1}^4 + \pi {R_2}^2 {T_2}^4\right\}$$

副極小



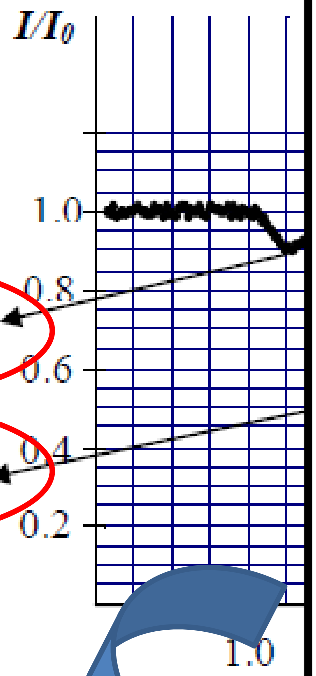
$$i_1 = k\pi {R_1}^2 {T_1}^4$$

$$\frac{i_0}{i_1} = \frac{k\left(\pi {R_1}^2 {T_1}^4 + \pi {R_2}^2 {T_2}^4\right)}{k\pi {R_1}^2 {T_1}^4} = 1 + \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^4 = \frac{1}{\alpha}$$

$$\frac{i_2}{i_1} = \frac{k\left\{\pi\left({R_1}^2 - {R_2}^2\right){T_1}^4 + \pi {R_2}^2 {T_2}^4\right\}}{k\pi {R_1}^2 {T_1}^4} = 1 - \frac{{R_2}^2\left({T_1}^4 - {T_2}^4\right)}{{R_1}^2 {T_1}^4} = 1 - \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 \left(1 - \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^4\right)$$

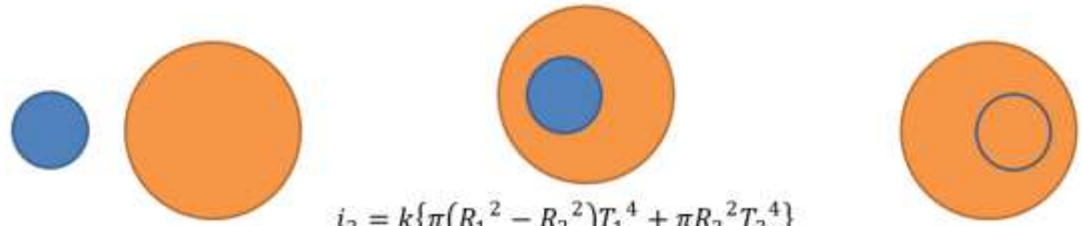
$$= 1 - \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 + \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^4 = \frac{\beta}{\alpha}$$

半



$\alpha = \quad I/I_0 = 0.90$

$\beta = I/I_0 = 0.63$



$i_0 = k(\pi R_1{}^2 T_1{}^4 + \pi R_2{}^2 T_2{}^4)$

$i_2 = k\{\pi(R_1{}^2 - R_2{}^2)T_1{}^4 + \pi R_2{}^2 T_2{}^4\}$

$i_1 = k\pi R_1{}^2 T_1{}^4$

$$\frac{i_0}{i_1} = \frac{k(\pi R_1{}^2 T_1{}^4 + \pi R_2{}^2 T_2{}^4)}{k\pi R_1{}^2 T_1{}^4} = 1 + \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^4 = \frac{1}{\alpha}$$

$$\frac{i_2}{i_1} = \frac{k\{\pi(R_1{}^2 - R_2{}^2)T_1{}^4 + \pi R_2{}^2 T_2{}^4\}}{k\pi R_1{}^2 T_1{}^4} = 1 - \frac{R_2{}^2(T_1{}^4 - T_2{}^4)}{R_2{}^2 T_1{}^4} = 1 - \left(\frac{R_2}{R_1}\right)\left(1 - \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^4\right)^2$$

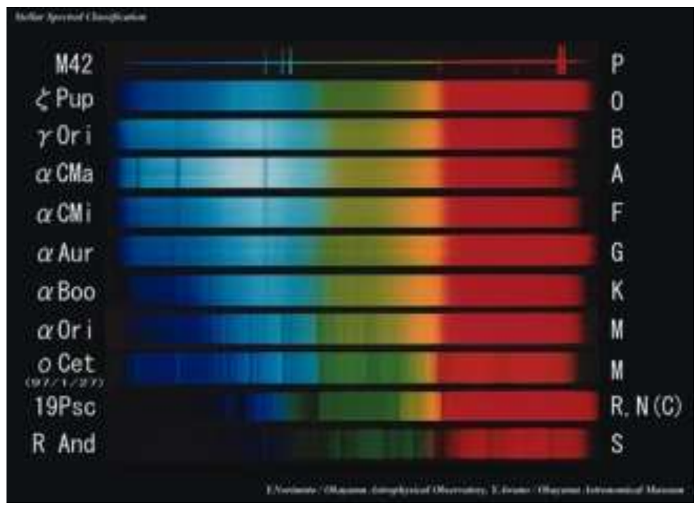
$$= 1 - \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 + \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^4 = \frac{\beta}{\alpha}$$

$$\frac{R_1}{R_2} = \sqrt{\frac{\alpha}{1-\beta}} \rightarrow \frac{R_1}{R_2} = 1.6\,, \quad \frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1-\alpha}} \rightarrow \frac{T_1}{T_2} = 1.4$$

○連星の分光観測

分光観測とは？

光を何色にも分けて、どの部分が明るいか、暗いかを調べることを分光観測という



各スペクトル型を代表する星のスペクトル画像。天体名は左側に、スペクトル型は右側に示されている。OからMまでは天体の温度の系列（O型が最も高温）であるが、R、NやSは化学組成が特殊なために別に分類されたものである。データは岡山天体物理観測所で取得されたもので、図は『宇宙スペクトル博物館』（粟野諭美ほか、裳華房）による。

分光観測から分かる物理量

t/days	0.3	0.6	0.9	1.2	1.5	1.8	2.1	2.4
λ_1 (Å)	5897.5	5897.7	5897.2	5896.2	5895.1	5894.3	5894.1	5894.6
λ_2 (Å)	5893.1	5892.8	5893.7	5896.2	5897.3	5898.7	5899.0	5898.1

t/days	2.7	3.0	3.3	3.6	3.9	4.2	4.5	4.8
λ_1 (Å)	5895.6	5896.7	5897.3	5897.7	5897.2	5896.2	5895.0	5894.3
λ_2 (Å)	5896.4	5894.5	5893.1	5892.8	5893.7	5896.2	5897.4	5898.7

第38回国際物理オリンピック2007　イラン大会　pink問題より

- それぞれの星の軌道速度
- 連星の質量比
- 連星の共通の重心からのそれぞれの距離
- 二つの星の間の距離
- それぞれの星の質量

それぞれの星の軌道速度

波長λとすると特殊相対性理論の光のドップラー効果より

$$\lambda = \frac{1-\left(\frac{v}{c}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \times \lambda_0$$

cは光の速度でvがcに比べてずっと小さいときに上の式は

$$\lambda = \left(1 - \frac{v}{c}\right) \times \lambda_0 = \lambda_0 - \frac{v}{c}\lambda_0$$

となり波長の変化を

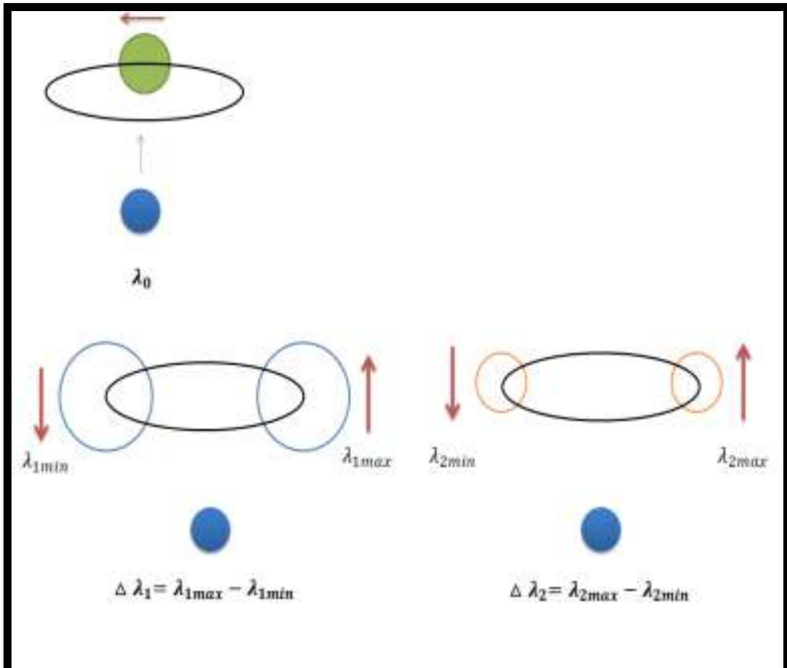
$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$$

とすると

$$\lambda - \lambda_0 = -\frac{v}{c}\lambda_0$$

$$\Delta\lambda = -\frac{v}{c}\lambda_0 \qquad \therefore\ \frac{\boldsymbol{\Delta\lambda}}{\boldsymbol{\lambda_0}} = -\frac{\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{c}}$$

それぞれの星の軌道速度



t/days	0.3	0.6	0.9	1.2	1.5	1.8	2.1	2.4
λ_1 (Å)	5897.5	5897.7	5897.2	5896.2	5895.1	5894.3	5894.1	5894.6
λ_2 (Å)	5893.1	5892.8	5893.7	5896.2	5897.3	5898.7	5899.0	5898.1

t/days	2.7	3.0	3.3	3.6	3.9	4.2	4.5	4.8
λ_1 (Å)	5895.6	5896.7	5897.3	5897.7	5897.2	5896.2	5895.0	5894.3
λ_2 (Å)	5896.4	5894.5	5893.1	5892.8	5893.7	5896.2	5897.4	5898.7

ここで表より

$$\lambda_{1max} = 5897.7(\text{Å}) \quad \lambda_{1min} = 5894.1(\text{Å})$$

$$\therefore \Delta\lambda_1 = 3.6(\text{Å})$$

$$\lambda_{2max} = 5899.0(\text{Å}) \quad \lambda_{2min} = 5892.8(\text{Å})$$

$$\therefore \Delta\lambda_2 = 6.2(\text{Å})$$

ドップラー効果の用いる波長差は$\Delta\lambda/2$なので

$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = -\frac{v}{c}$ より

$$v_1 = c\frac{\Delta\lambda_1/2}{\lambda_0} = 9.16 \times 10^4 \fallingdotseq 9.2 \times 10^4\ {}^{m}/_{s}$$

$$v_2 = c\frac{\Delta\lambda_2/2}{\lambda_0} = 1.58 \times 10^5 \fallingdotseq 1.6 \times 10^5\ {}^{m}/_{s}$$

連星の質量比と共通の重心からのそれぞれの距離

軌道速度が分かると星の質量比は運動量保存則で求めることができる

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{1.6 \times 10^5}{9.2 \times 10^4} = 1.73 \fallingdotseq 1.7$$

さらに軌道速度により連星の共通の重心からのそれぞれの距離も求めることができる

$r = \dfrac{v}{\omega}$より

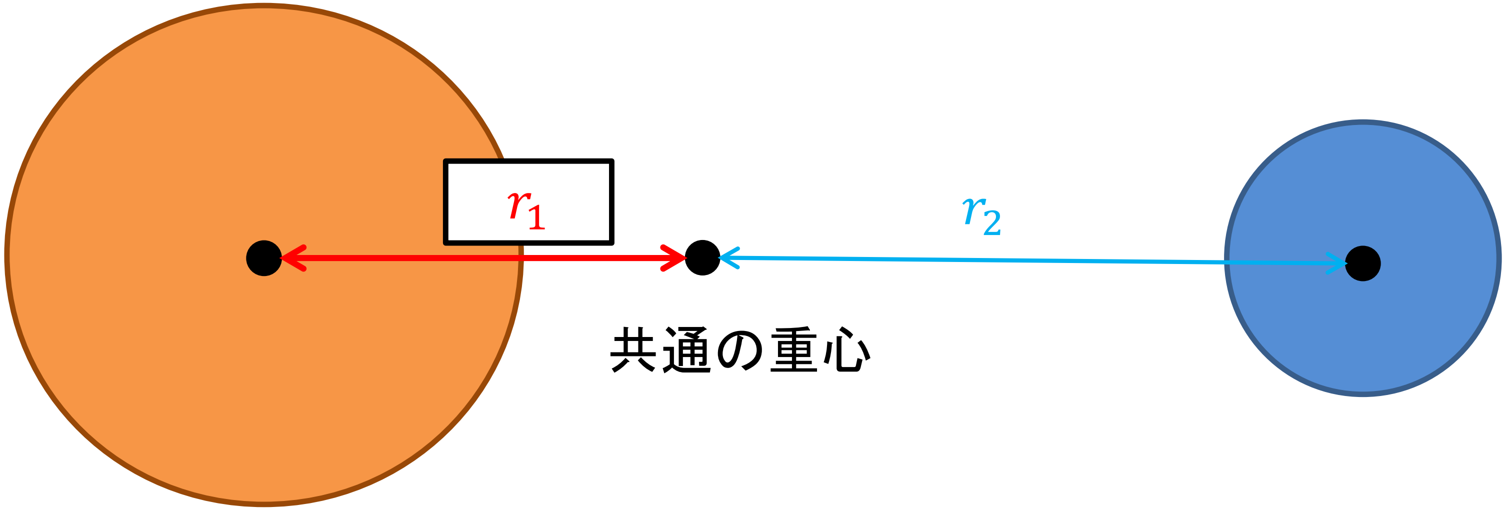
$$r_1 = \frac{v_1}{\omega} = \frac{9.2 \times 10^4}{2.4 \times 10^{-5}} = 3833333333 = 3.8 \times 10^9 [m]$$

$$r_2 = \frac{v_2}{\omega} = \frac{1.6 \times 10^5}{2.4 \times 10^{-5}} = 6666666667 \fallingdotseq 6.7 \times 10^9 [m]$$

二つの星の間の距離

二つの星の間の距離はr_1とr_2を使って

$$r = r_1 + r_2 = 3.8 \times 10^9 + 6.7 \times 10^9 = 1.1 \times 10^{10} [\mathrm{m}]$$



太陽-地球間の距離　1AU＝$1.5 \times 10^{11} m$

それぞれの星の質量

等速円運動の公式より

$$a = r\omega^2$$

これより

$$a = r\left(\frac{V}{r}\right)^2$$

$$a = \frac{V^2}{r}$$

また、$F = ma$より

$$G\frac{m_1 m_2}{r^2} = m_1\frac{{V_1}^2}{r_1} = m_2\frac{{V_2}^2}{r_2}$$

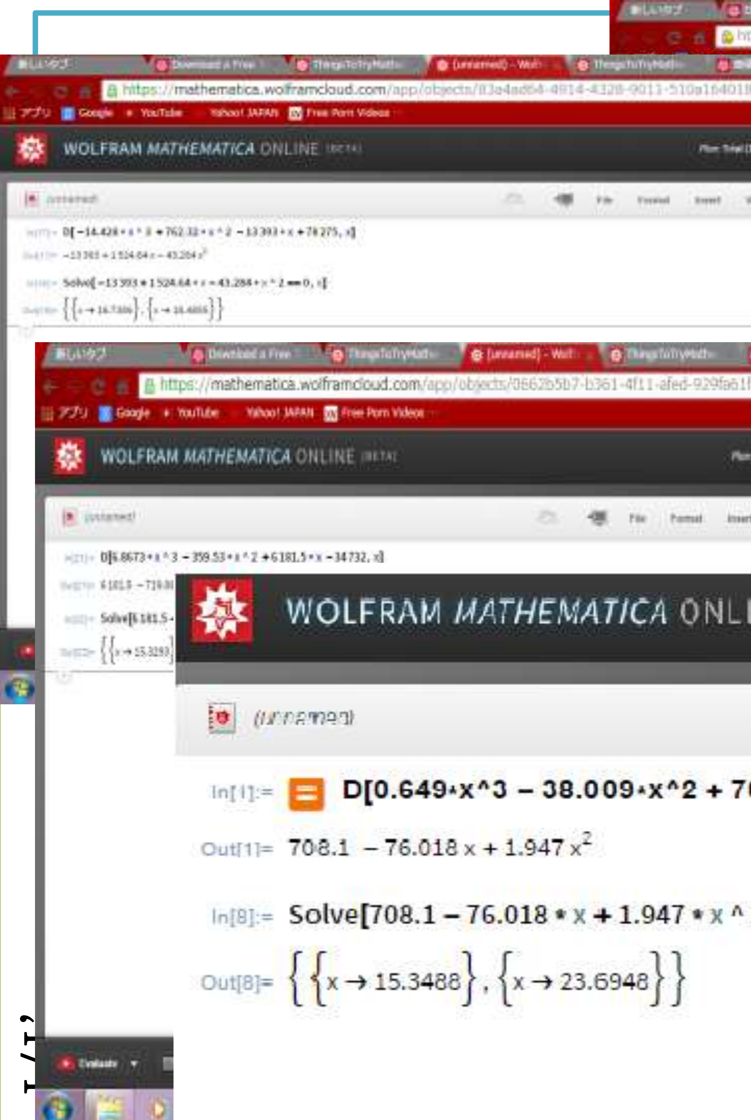
それぞれの星の質量

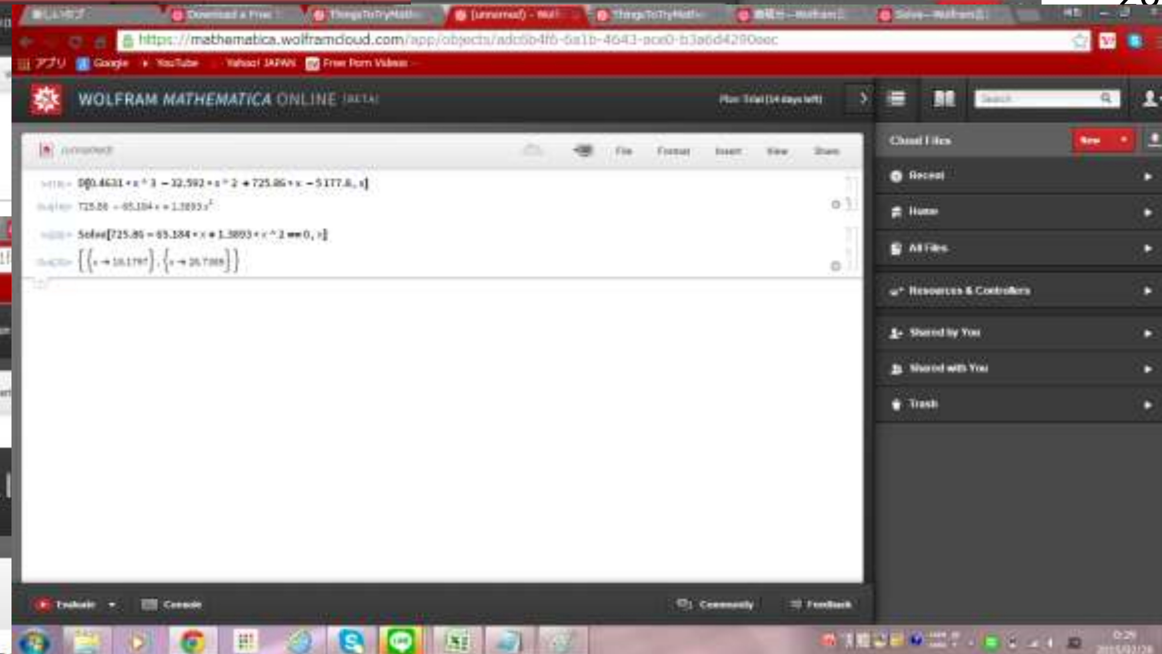
よって、

$$\begin{cases} m_1 = \dfrac{r^2 {V_2}^2}{G r_2} \\ m_2 = \dfrac{r^2 {V_1}^2}{G r_1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 = \dfrac{\left(1.0\times10^{10}\right)^2\left(1.6\times10^{5}\right)^2}{6{,}7\times10^{-11}\times6.5\times10^{9}} = 5.87\times10^{30} = 6.0\times10^{30}[kg] \\ m_2 = \dfrac{\left(1.0\times10^{10}\right)^2\left(9.2\times10^{4}\right)^2}{6{,}7\times10^{-11}\times3.8\times10^{9}} = 3.32\times10^{30} = 3.0\times10^{30}[kg] \end{cases}$$

太陽の質量　$2.0\times10^{30}[kg]$





20

In[1]:= D[0.649∗x^3 − 38.009∗x^2 + 708.1∗x − 4232.2,x]

Out[1]= 708.1 − 76.018 x + 1.947 x^2

In[8]:= Solve[708.1 − 76.018 ∗ x + 1.947 ∗ x ^ 2 == 0, x]

Out[8]= {{x → 15.3488}, {x → 23.6948}}

In[17]:= D[−14.428 ∗ x ^ 3 + 762.32 ∗ x ^ 2 − 13 393 ∗ x + 78 275, x]

Out[17]= −13 393 + 1 524.64 x − 43.284 x^2

In[18]:= Solve[−13 393 + 1 524.64 ∗ x − 43.284 ∗ x ^ 2 == 0, x]

Out[18]= {{x → 16.7386}, {x → 18.4855}}

10

5

0

In[19]:= D[0.4631 ∗ x ^ 3 − 32.592 ∗ x ^ 2 + 725.86 ∗ x − 5 177.8, x]

Out[19]= 725.86 − 65.184 x + 1.3893 x^2

In[20]:= Solve[725.86 − 65.184 ∗ x + 1.3893 ∗ x ^ 2 == 0, x]

Out[20]= {{x → 18.1797}, {x → 28.7389}}

In[21]:= D[6.8673 ∗ x ^ 3 − 359.53 ∗ x ^ 2 + 6 181.5 ∗ x − 34 732, x]

Out[21]= 6 181.5 − 719.06 x + 20.6019 x^2

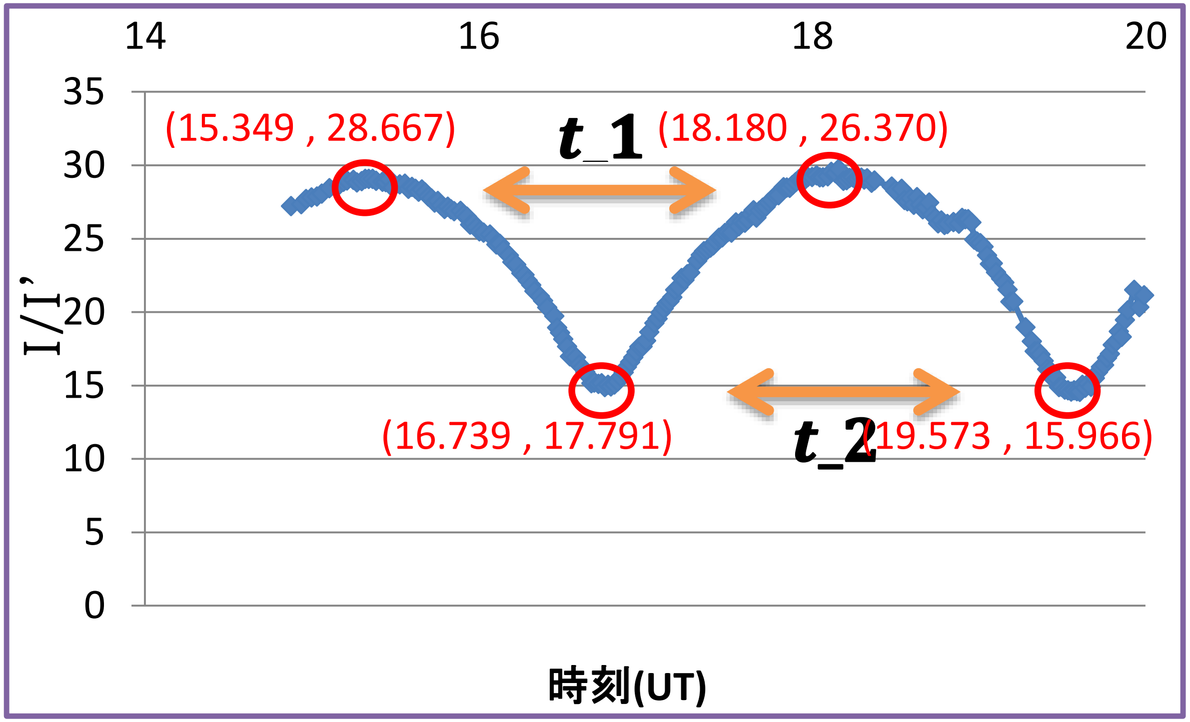
In[22]:= Solve[6 181.5 − 719.06 ∗ x + 20.6019 ∗ x ^ 2 == 0, x]

Out[22]= {{x → 15.3293}, {x → 19.5733}}

時刻(UT)

周期を求める

1. 半周期のt_1とt_2を求める。
2. 半周期t_1, t_2を足し周期を求める



$$t_1 + t_2 = 5.667$$

5.667時間
＝ 5時間40分1.2秒

半径比、温度比を求める

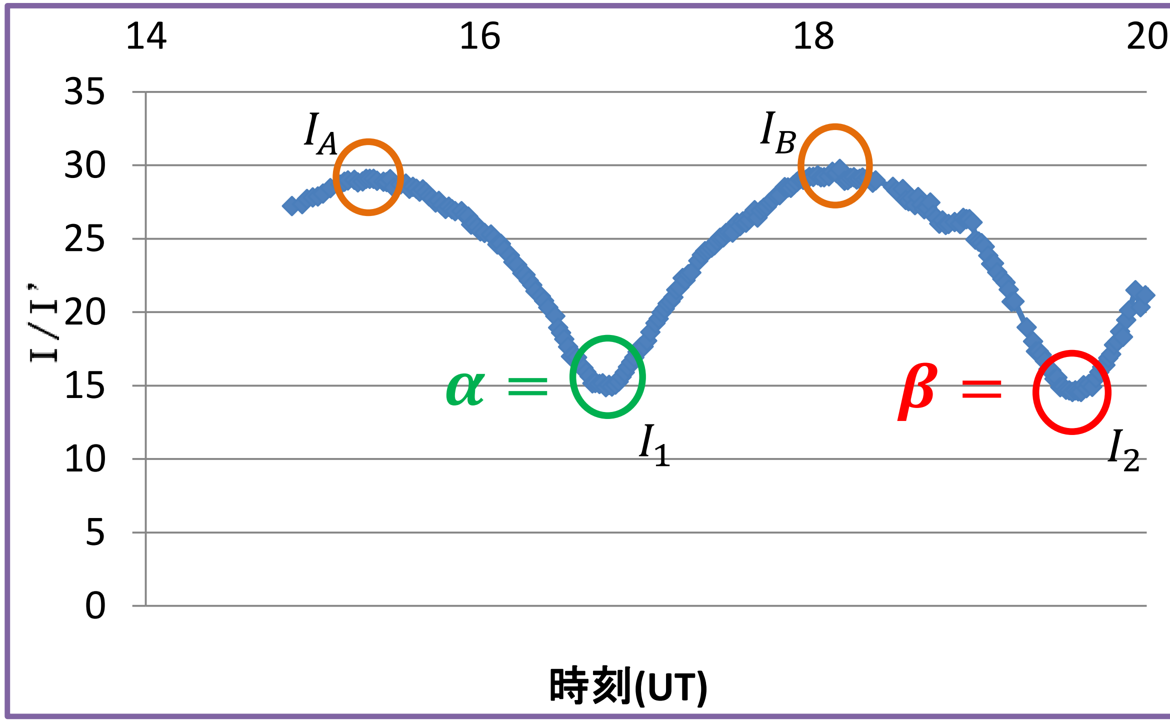
極大値I_0を求める

$$I_0 = \frac{I_A + I_B}{2} = 27.52$$

I_0を1とする時の副極小、主極小の光度比

$$\alpha = \frac{I_1}{I_0} = 0.6320$$

$$\beta = \frac{I_2}{I_0} = 0.5802$$

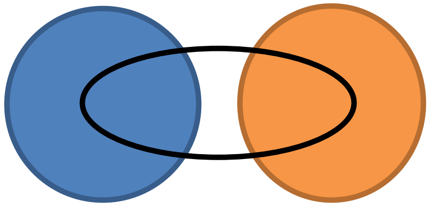


半径比、温度比を求めると

$$\frac{R_1}{R_2} = \sqrt{\frac{\alpha}{1-\beta}} = \mathbf{1.227}$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1-\alpha}} = \mathbf{1.068}$$

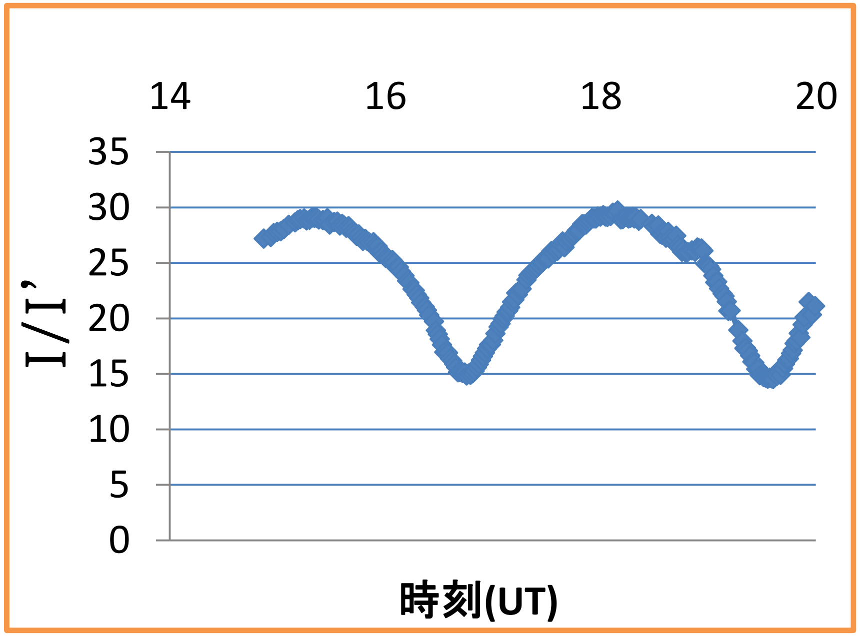
解析結果と考察(V0523 Cas)



計算より、V0523 Casの**公転周期は5時間40分**である。

<分かったこと>
(1) 半径比より、二つの星の大きさに差があまりない。
(2) 温度比より、二つの星の温度はほぼ同じである。

文献データとして、この食連星はおおぐまW型(EW)であり、**周期は5時間31分**であるから、分析結果はほぼ一致している。計算誤差は多少あるが、半径が変わらない連星の温度比は差がないこともわかる。

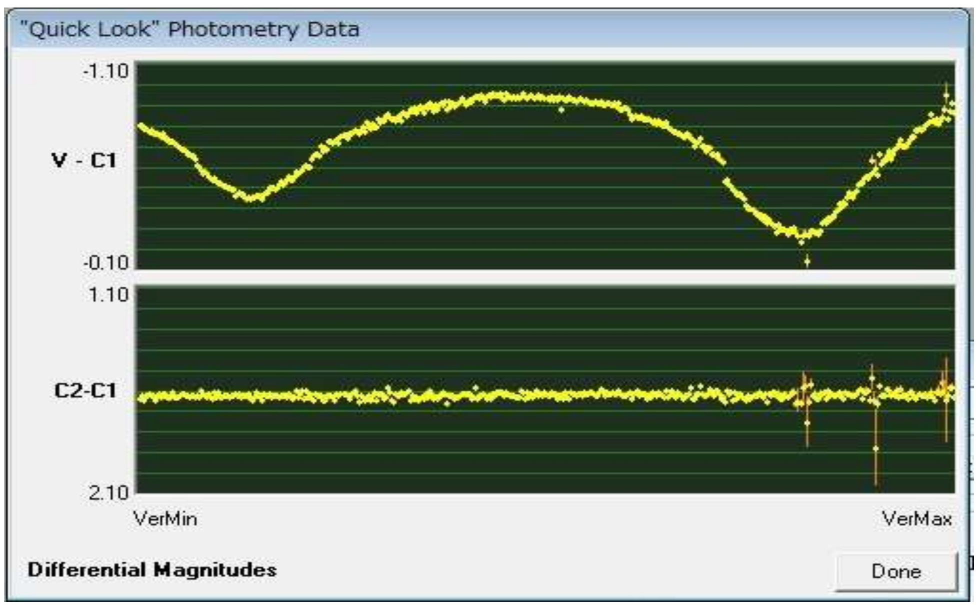


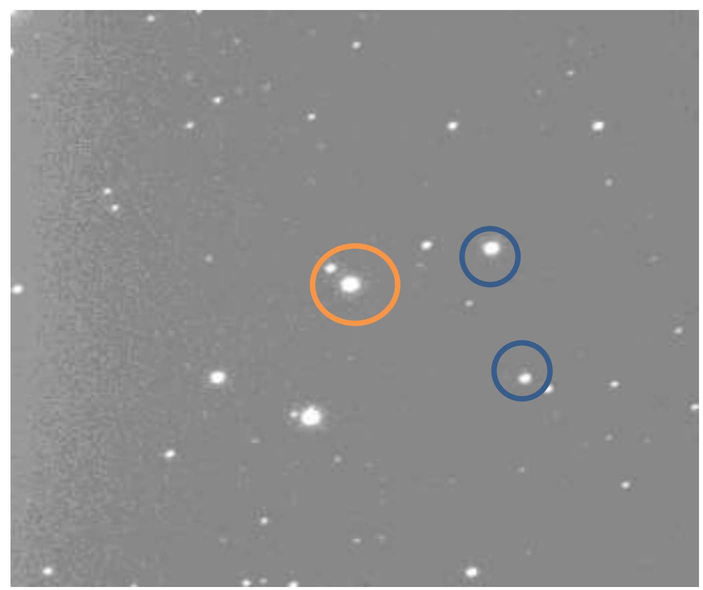
まとめ

・10月に美星天文台に観測に行ったときには機械の故障で分光観測ができなかった。

・12月V1848(ori)の測光観測を行い,データが取れた。

・違った種類の食連星の物理量を求めると違った結果が得られるので非常に興味深い。






ご清聴ありがとうございました!