三角数から作られる偽ゼータ関数

中野 日向

ζ（ゼータ）関数とは…

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$ （自然数の逆 s 乗和）

で表される関数

例）

$$\zeta(1)=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}+\cdots$$

$$\zeta(2)=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}^2}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}^2}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}^2}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}^2}+\cdots$$

$$\zeta(0)=\frac{1}{1^0}+\frac{1}{2^0}+\frac{1}{3^0}+\frac{1}{4^0}+\cdots\ =\mathbf{1}+\mathbf{1}+\mathbf{1}+\mathbf{1}+\cdots$$

$$\zeta(-1)=\frac{1}{1^{-1}}+\frac{1}{2^{-1}}+\frac{1}{3^{-1}}+\frac{1}{4^{-1}}+\cdots\ =\mathbf{1}+\mathbf{2}+\mathbf{3}+\mathbf{4}+\cdots$$

ゼータ関数と素数の**密接な関係**

オイラー積

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$$

(p = 素数)

s = **-1**とすると…

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots = (1 - 2)(1 - 3)(1 - 5) \cdots (1 - p) \ldots$$

自然数と素数が **１対１対応！！**

自然数と素数の**密接な関係 2**

素数定理

$$\boldsymbol{\pi(x) = R(x) - \sum_{\rho} R(x^{\rho})} \quad \left\{ R(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu(m)}{m} \mathrm{Li}\, x^{\frac{1}{m}} \;,\; \mathrm{Li}\, x = \int_{2}^{x} \frac{\mathrm{d}x}{\ln x} \right\}$$

- $\boldsymbol{\pi(x)}$とは…　　自然数 **x** までの**素数**の**総個数**

ゼータ関数の**自明でない零点**($\zeta(s)=0$となる s)を見つけると
$\boldsymbol{\pi(x)}$を正確に計算できる

ゼータ関数を研究すると
自然数と素数の関係が導き出せる

ゼータの拡張 **偽ゼータ**

ゼータ関数

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots$$

偽ゼータ関数

$$\boldsymbol{\zeta_T(s) = \frac{1}{2^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{12^s} + \frac{1}{20^s} + \cdots}$$

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & & & & \\
 & & & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{3} & & & & \\
 & & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{4} & & & \\
 & & \frac{1}{5} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{5} & & \\
 & \frac{1}{6} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{60} & & \frac{1}{60} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{6} & \\
\frac{1}{7} & & \frac{1}{42} & & \frac{1}{105} & & \frac{1}{140} & & \frac{1}{105} & & \frac{1}{42} & & \frac{1}{7} \\
 & & \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & &
\end{array}
$$

ライプニッツの調和三角形

偽ゼータ解析

偽ゼータ関数を直接調べるのは難しい…

⇒　**似た関数を作り、偽ゼータ関数との関係を見つける**

⇒　**その関数について調べる**

偽ゼータ補助関数

$$\boldsymbol{A(s)} = \frac{1}{1^s}\left(0 + \frac{1}{2^s}\right) + \frac{1}{2^s}\left(\frac{1}{1^s} + \frac{1}{3^s}\right) + \frac{1}{3^s}\left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s}\right) + \cdots$$

$$= \frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{12^s} + \frac{1}{12^s} = 2\zeta_T(s)$$

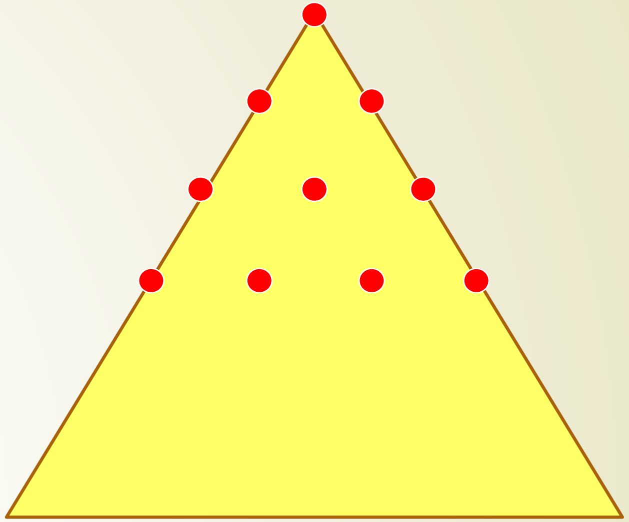
$$\boxed{\zeta_T(s) = \frac{1}{2}A(s)}$$

偽ゼータと三角数

s が**自然数**の場合 …

$$\begin{cases} \zeta_T(0) = 1+1+1+\cdots = -\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \\ \zeta_T(2) = \dfrac{1}{2}A(2) = \dfrac{\boldsymbol{\pi}^{\mathbf{2}}}{\mathbf{3}} - \mathbf{3} \end{cases}$$

$$\zeta_T(1) = \frac{1}{2}A(1) = \mathbf{1}$$



s = -2 の場合…

$$\zeta_T(-2) = 4\sum_{k=1}^{\infty} T_k^2$$

(T_k はk番目の三角数)

$T_k = 1,3,6,10,\ldots$

偽ゼータ関数には

三角数が大きく関わっている

偽ゼータ関数の**夢**

ゼータ関数　⇒　自然数と素数との関係　ならば…

偽ゼータ関数は

三角数とメルセンヌ素数との関係？

更には完全数との関係も

三角数は無限にある　⇒

未だ証明されていない

メルセンヌ素数は無限に存在する？

メルセンヌ素数定理の発見？

メルセンヌ素数の例）　$3, 7, 31, \ldots, 2^n - 1$

偽ゼータ関数の**夢**

偽ゼータについての性質が分かれば

調和三角形の全ての行の

偽ゼータの性質が分かる

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & & & & \\
 & & & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{3} & & & & \\
 & & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{4} & & & \\
 & & \frac{1}{5} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{5} & & \\
 & \frac{1}{6} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{60} & & \frac{1}{60} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{6} & \\
\frac{1}{7} & & \frac{1}{42} & & \frac{1}{105} & & \frac{1}{140} & & \frac{1}{105} & & \frac{1}{42} & & \frac{1}{7} \\
 & & \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & &
\end{array}
$$

ライプニッツの調和三角形

次の目標は

調和三角形以外の偽ゼータも