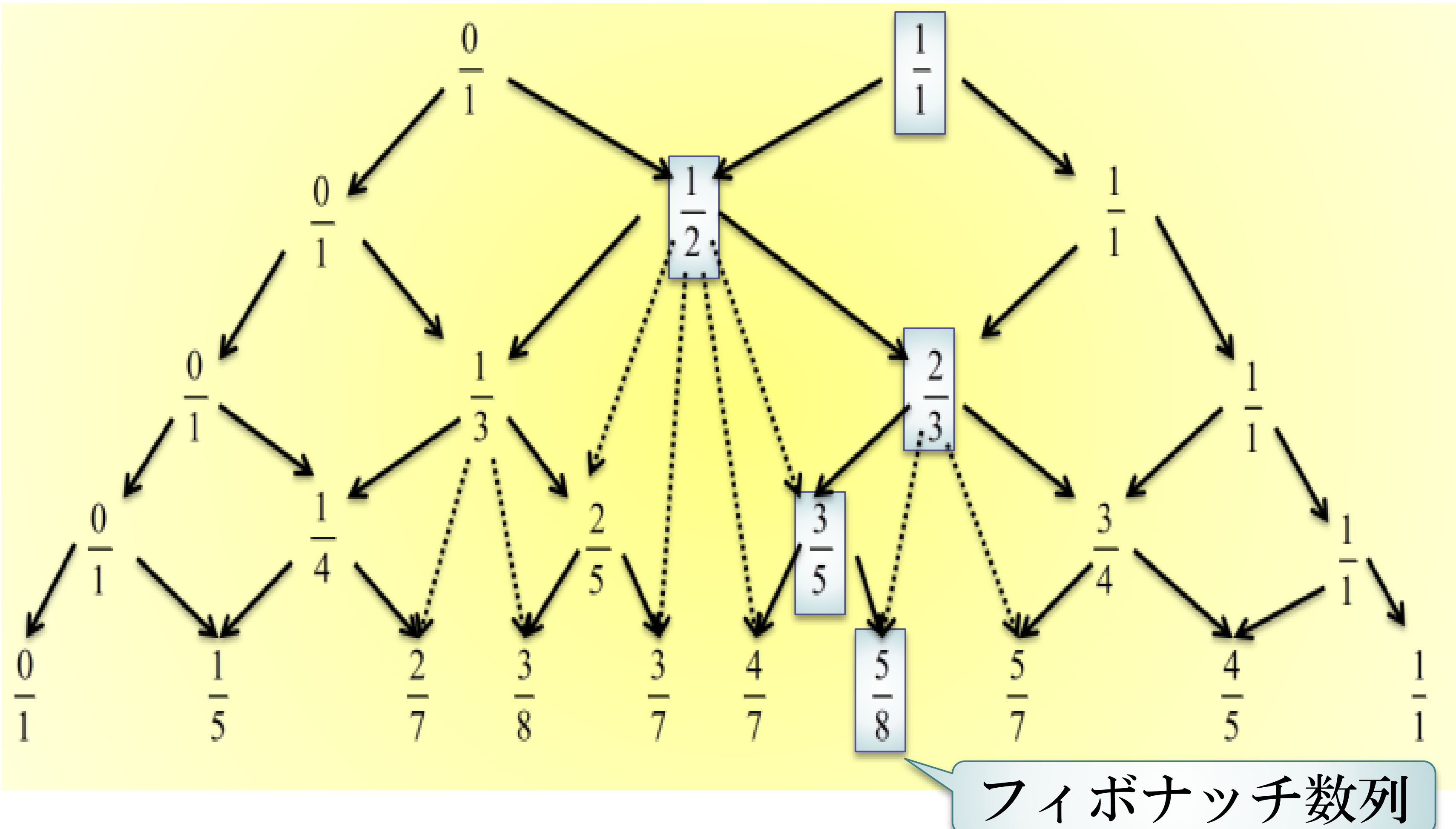
n次元ファレイ空間の結晶理論

小林祐志
赤松昌俊

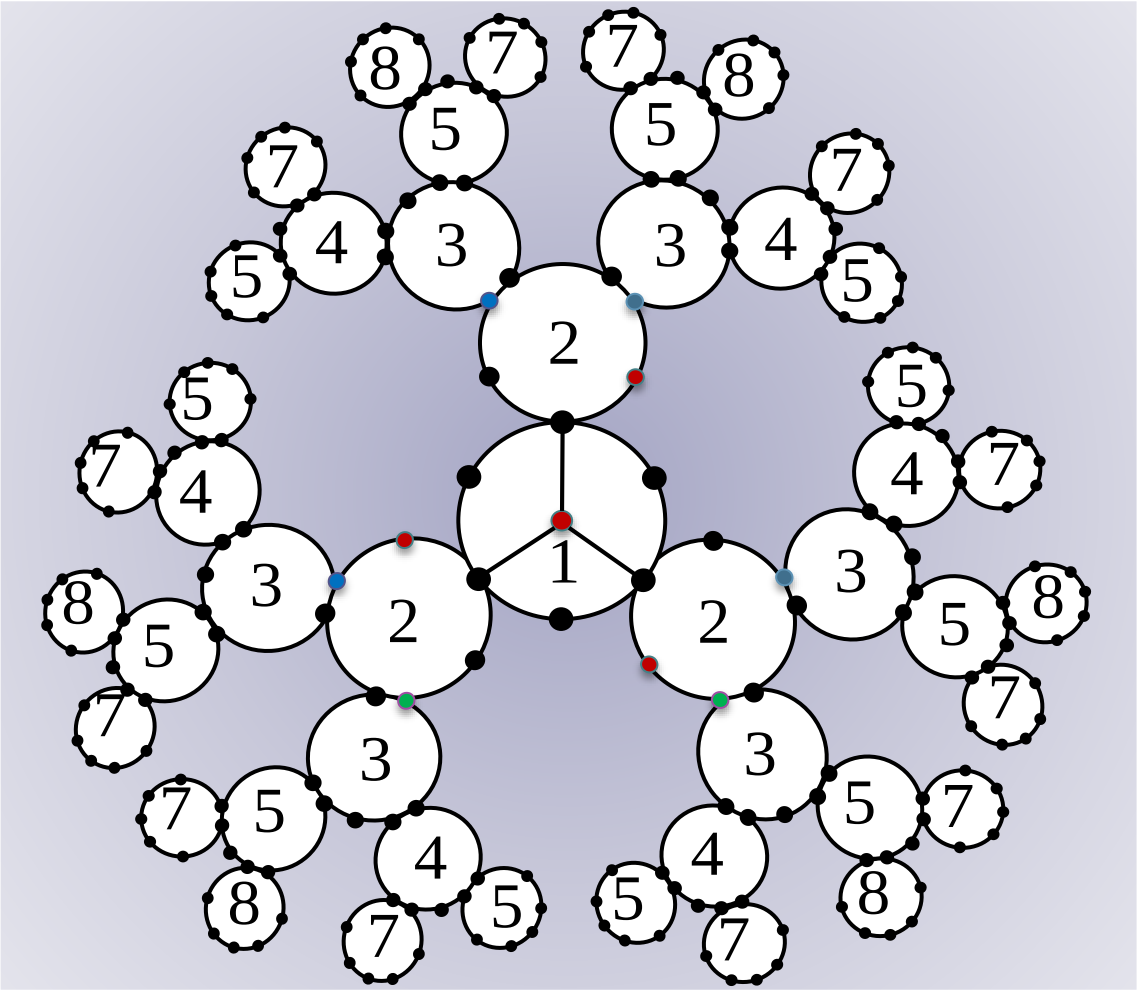
ファレイ数列のツリー構造



ファレイさんの足し算　$\frac{b}{a} \oplus \frac{d}{c} = \frac{b+d}{a+c}$

全ての既約分数が生まれる

3次元ファレイ空間のvery goodなファレイ原子による結晶構造



$\frac{a}{b}$ 分数 ⇒ $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ 2次元ファレイ点 $\gcd(a,b)=1$ ⇒ $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ 3次元ファレイ点 $\gcd(a,b,c)=1$

私達の研究のアイディア

- ファレイ点の収束点がフィボナッチ数列の収束点に一致している
- 行列が重要な役割を果たしている

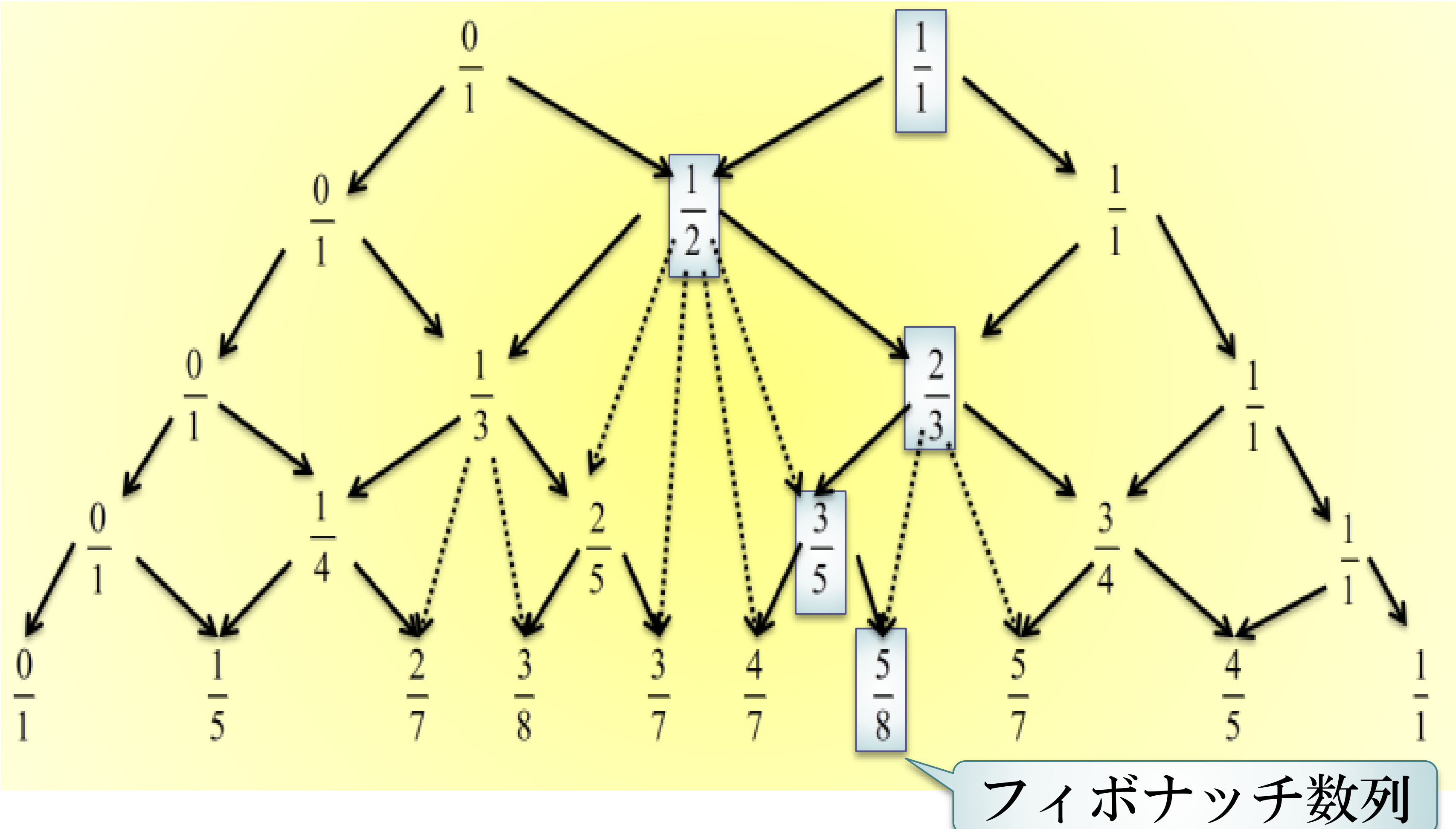
2次元ファレイ空間はフィボナッチ数列の並列化

研究計画

(1)　高次元化をにらみながら，2次元ファレイ空間をフィボナッチ数列の並列化という立場と，$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ とある行列から全て生み出すような理論を構築する．

(2)　2次元の新しい理論を拡張し，3次元以上のファレイ空間を研究する．

ファレイ数列のツリー構造



2次元ファレイ空間の結晶理論

$$\text{ファレイ生成行列}G_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

<定義2>

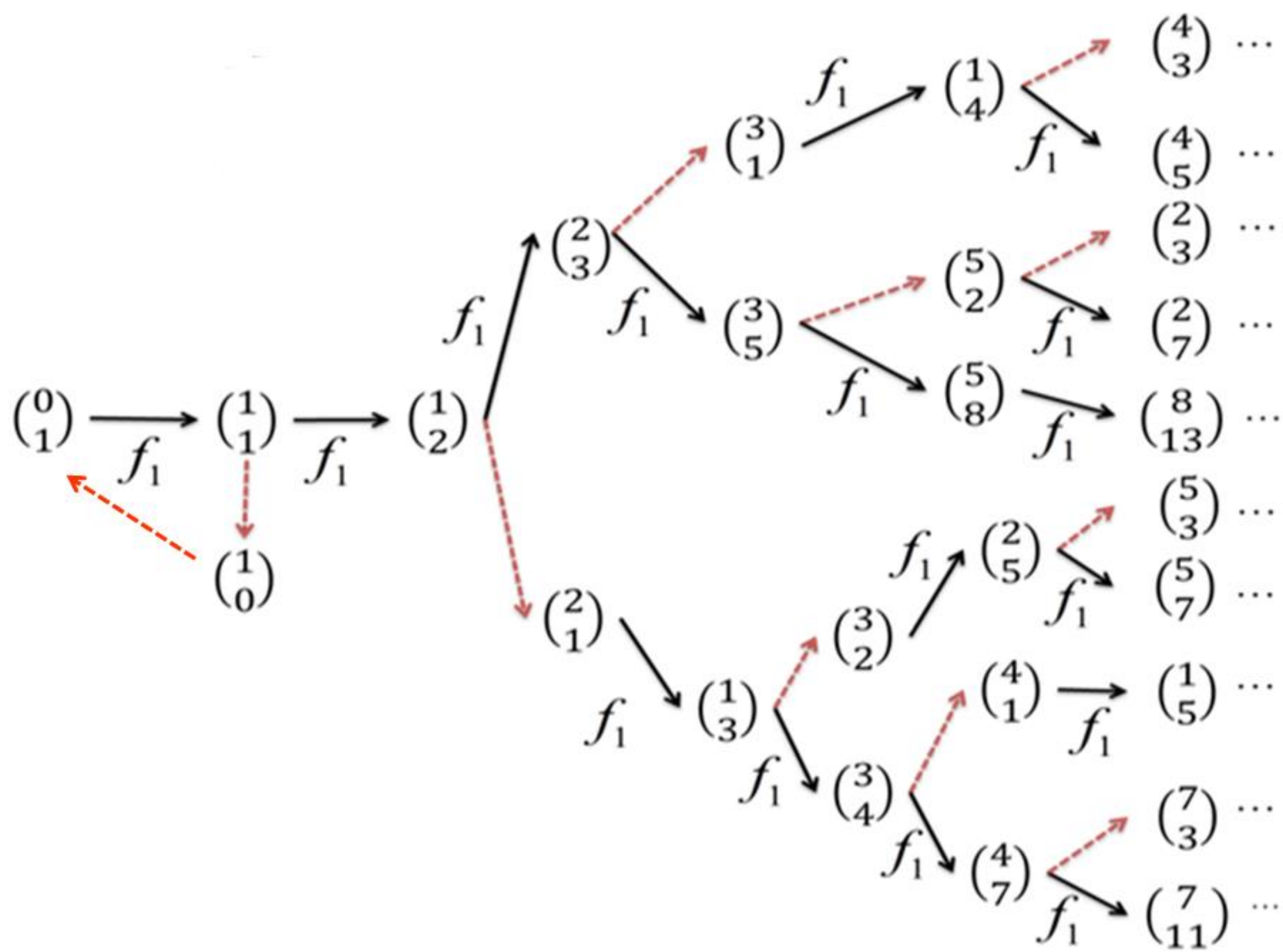
変換 $F: \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}$,初期値: $\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$は，次の2つの操作のどちらかを行う.

① $f_1: \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \mapsto G_2 \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}$ ② $f_2: \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \mapsto G_2 \begin{pmatrix} -a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_n \\ b'_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} |a'_n| \\ |b'_n| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}$

（注意）$F^{-1}: \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$は，次の操作$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto G_2{}^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} |a_1| \\ |a_2| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$を意味する.

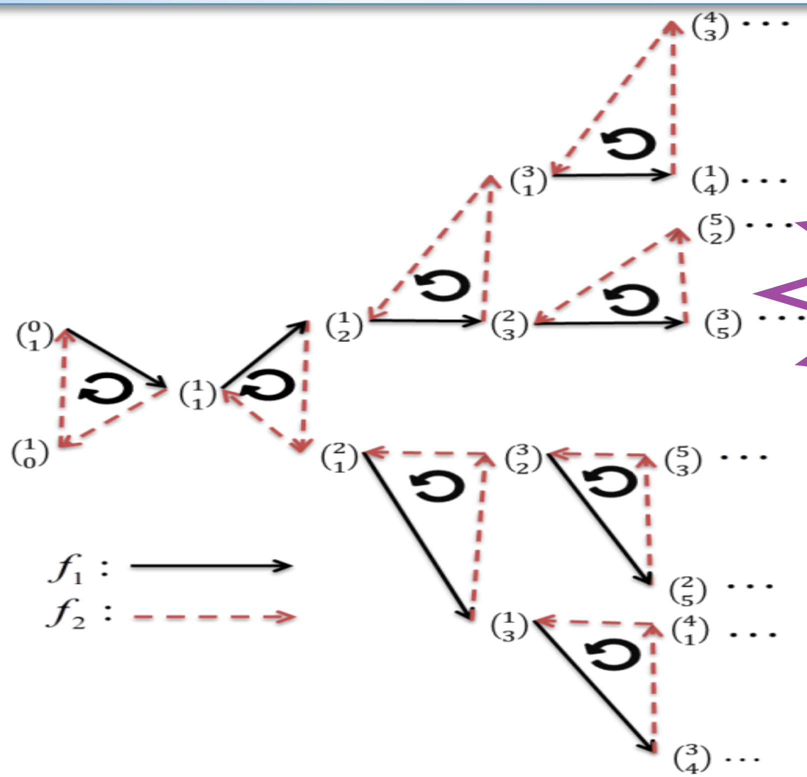
<主結果1>

2次元ファレイ空間$\mathfrak{I}_2$の任意のファレイ点は，変換Fを繰り返すことで，$\binom{0}{1}$から生み出される．そして，任意のファレイ点は有限回の変換F^{-1}で$\binom{0}{1}$と$\binom{1}{0}$，$\binom{1}{1}$のループ（基本ファレイ原子）に落ち込む．



<主結果2>(ファレイ結晶構造定理)

$\binom{a}{b}$を任意のファレイ数とすると, $(f_2 \circ f_2 \circ$



全ての点について,
3点連結ループ構造
を証明！

ファレイ原子のインデックス

$$\begin{tikzcd} & \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \arrow[dr] & \\ \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \arrow[ur, dashed] & & \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \arrow[ll, dashed] \end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd} & \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \arrow[dr] & \\ \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \arrow[ur, dashed] & & \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \arrow[ll, dashed] \end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd} & \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \arrow[dr] & \\ \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} \arrow[ur, dashed] & & \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} \arrow[ll, dashed] \end{tikzcd}$$

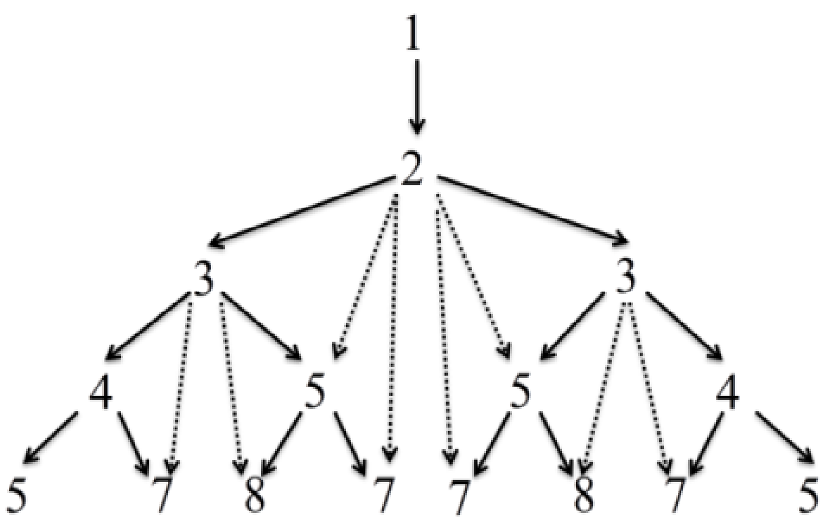
$$\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} \to 1 \qquad \begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix} \to 2 \qquad \begin{pmatrix}6\\6\end{pmatrix} \to 3$$

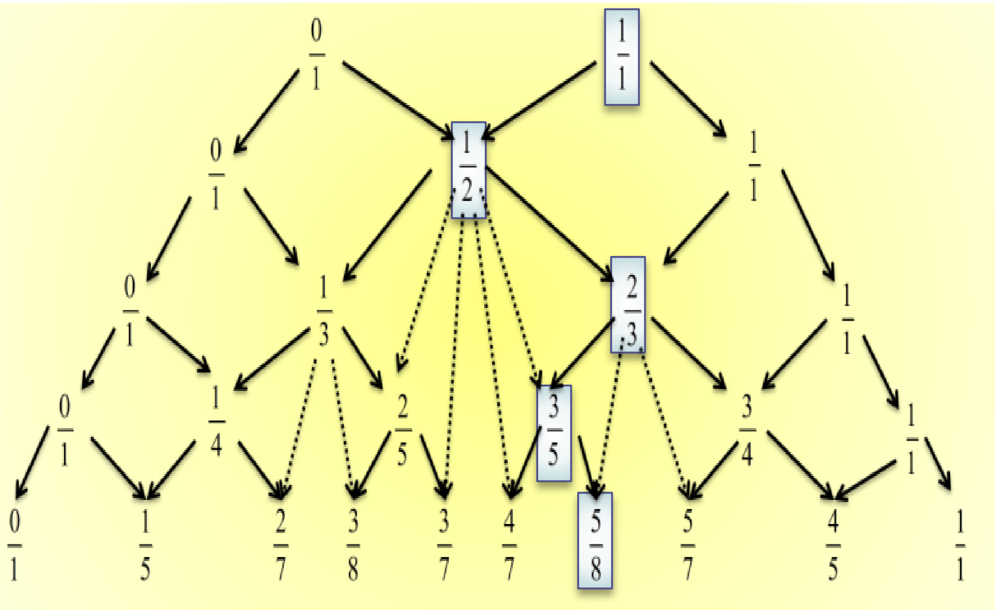
<定義3>ファレイ原子を構成する3点

$\binom{a}{b}, \binom{b}{a+b}, \binom{a+b}{a}$ に対して，$a+b$をファレイ原子のインデックス　という．

<主結果3>

インデックスツリーはファレイツリーと類似の構造を持つ．





3次元ファレイ空間の結晶理論

三次元ファレイ生成行列

$$G_3=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

<定義4>

変換F: $\begin{pmatrix}a_n\\b_n\\c_n\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix}a_{n+1}\\b_{n+1}\\c_{n+1}\end{pmatrix}$, 初期値$\begin{pmatrix}a_0\\b_0\\c_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$は，次の4つの操作のいずれかを行う．

①f_1: $\begin{pmatrix}a_n\\b_n\\c_n\end{pmatrix}\longmapsto G_3\begin{pmatrix}a_n\\b_n\\c_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{n+1}\\b_{n+1}\\c_{n+1}\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix}a_{n+1}\\b_{n+1}\\c_{n+1}\end{pmatrix}$

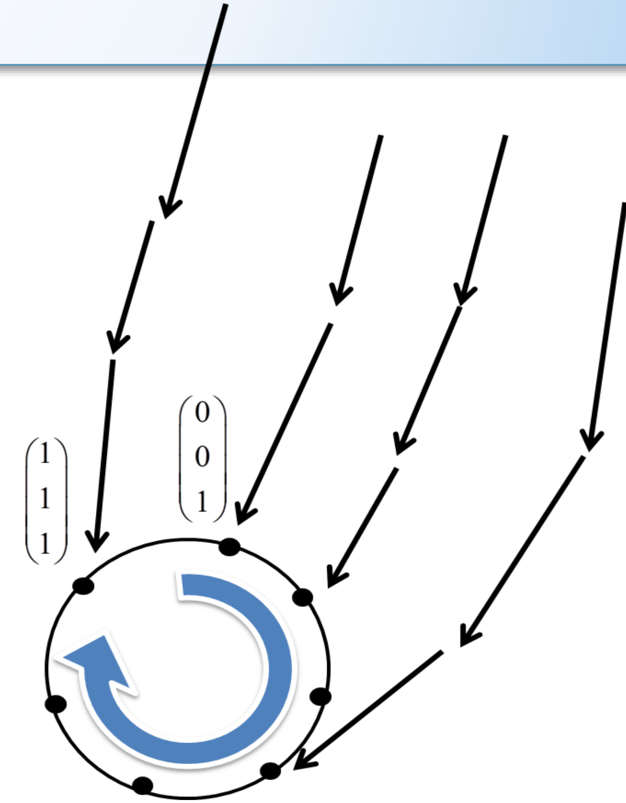
③f_3: $\begin{pmatrix}a_n\\b_n\\c_n\end{pmatrix}\longmapsto G_3\begin{pmatrix}a_n\\-b_n\\c_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{n+1}\\b_{n+1}\\c_{n+1}\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix}|a'|\\|b'|\\|c'|\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{n+1}\\b_{n+1}\\c_{n+1}\end{pmatrix}$

②f_2: $\begin{pmatrix}a_n\\b_n\\c_n\end{pmatrix}\longmapsto G_3\begin{pmatrix}-a_n\\b_n\\c_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{n+1}\\b_{n+1}\\c_{n+1}\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix}|a'|\\|b'|\\|c'|\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{n+1}\\b_{n+1}\\c_{n+1}\end{pmatrix}$

④f_4: $\begin{pmatrix}a_n\\b_n\\c_n\end{pmatrix}\longmapsto G_3\begin{pmatrix}-a_n\\-b_n\\c_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{n+1}\\b_{n+1}\\c_{n+1}\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix}|a'|\\|b'|\\|c'|\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{n+1}\\b_{n+1}\\c_{n+1}\end{pmatrix}$

<主結果４>

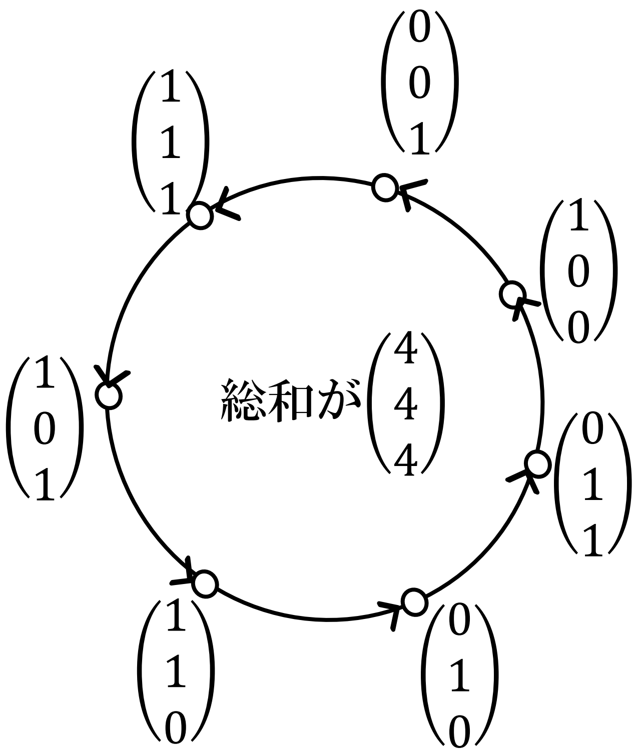
3次元ファレイ空間$\Im_3$の任意のファレイ点は，変換Fを繰り返すことで，$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$から生み出される．そして，任意のファレイ点は有限回の変換F^{-1}で7点からなる基本ファレイ原子のループに落ち込む．



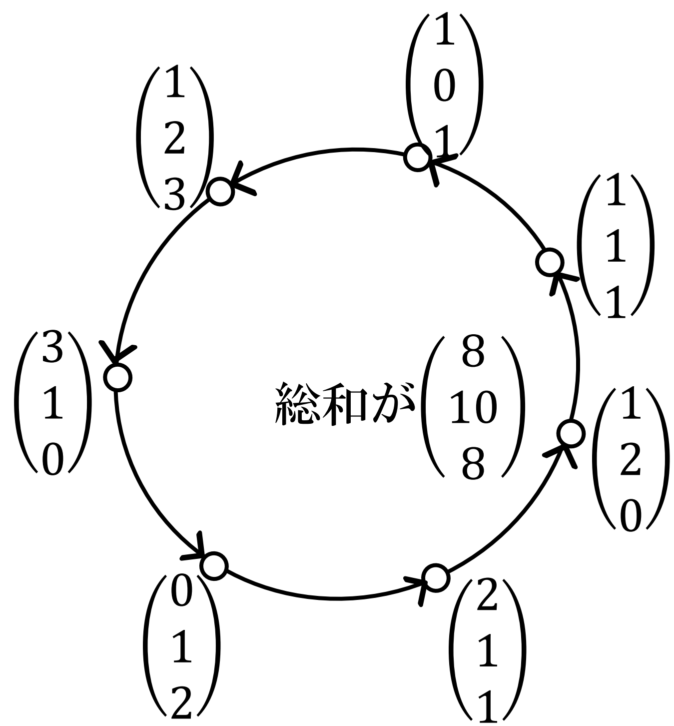
F^{-1}で基本ファレイ原子に落ち込む

<主結果５>

$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$を任意の3次元ファレイ点とすると，それを含む連結なループ構造が存在し，それは最低7点で構成される．



タイプ１（基本ファレイ原子）

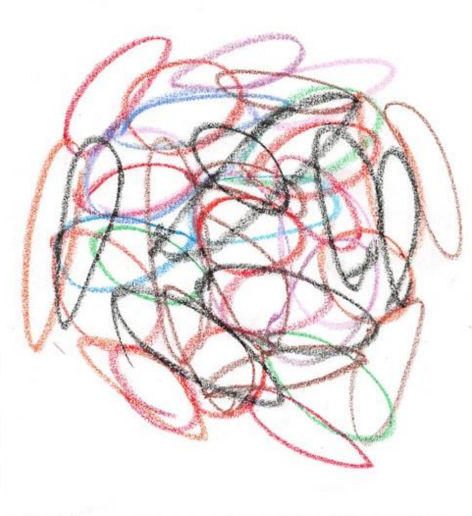


タイプ２

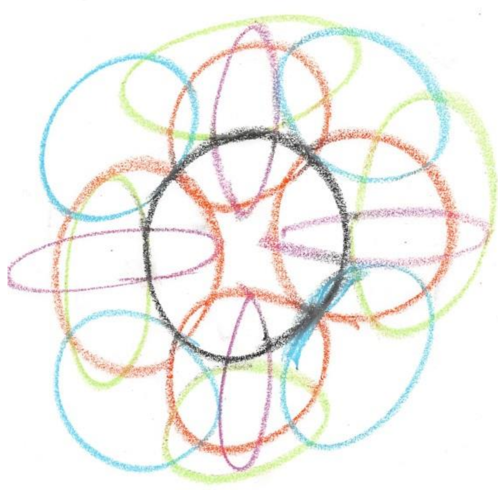
<定義5> ループとなる7点$\begin{pmatrix} a_j \\ b_j \\ c_j \end{pmatrix}$ $(1 \leq j \leq 7)$に対して，

$\sum_{j=1}^{7} \begin{pmatrix} a_j \\ b_j \\ c_j \end{pmatrix} = 4e \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$となる自然数$e$が存在したとき，そのループを

ファレイ原子　と呼び，eをファレイ原子のインデックスという．

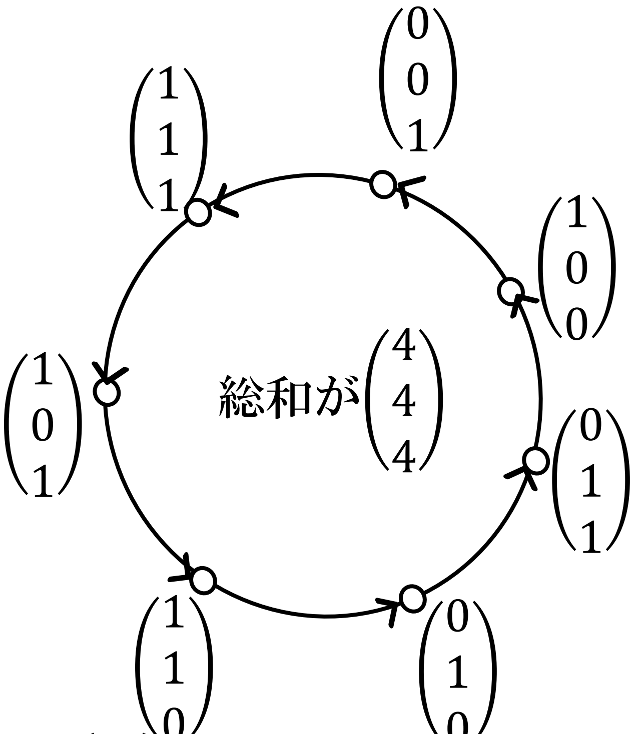


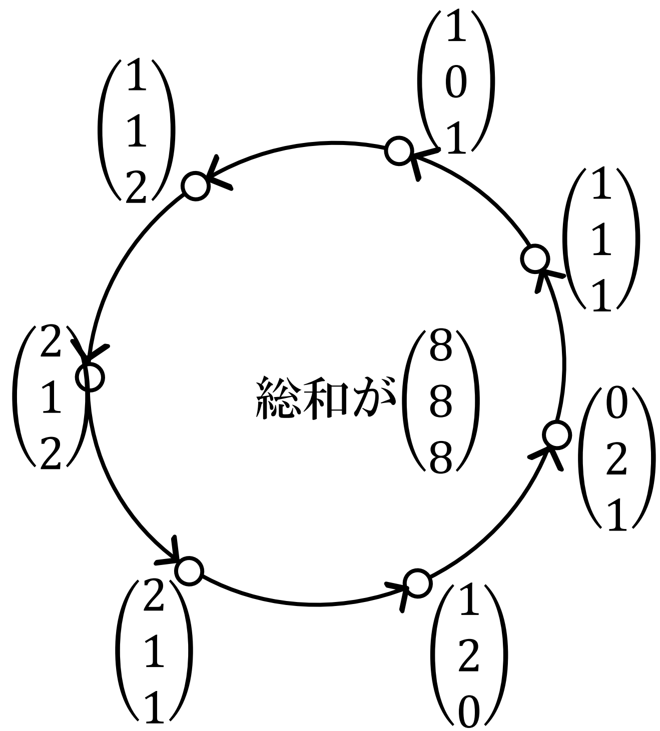
ループ構造



ファレイ原子構造

3次元ファレイ原子のインデックス

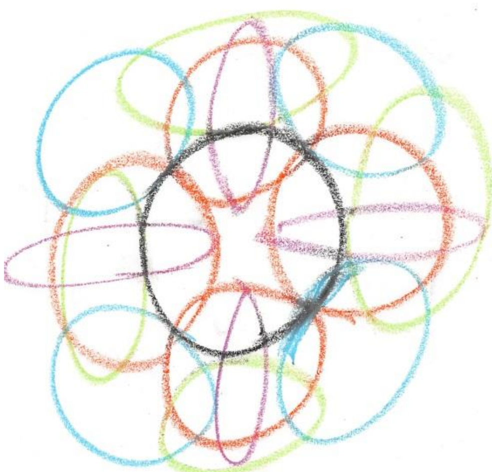




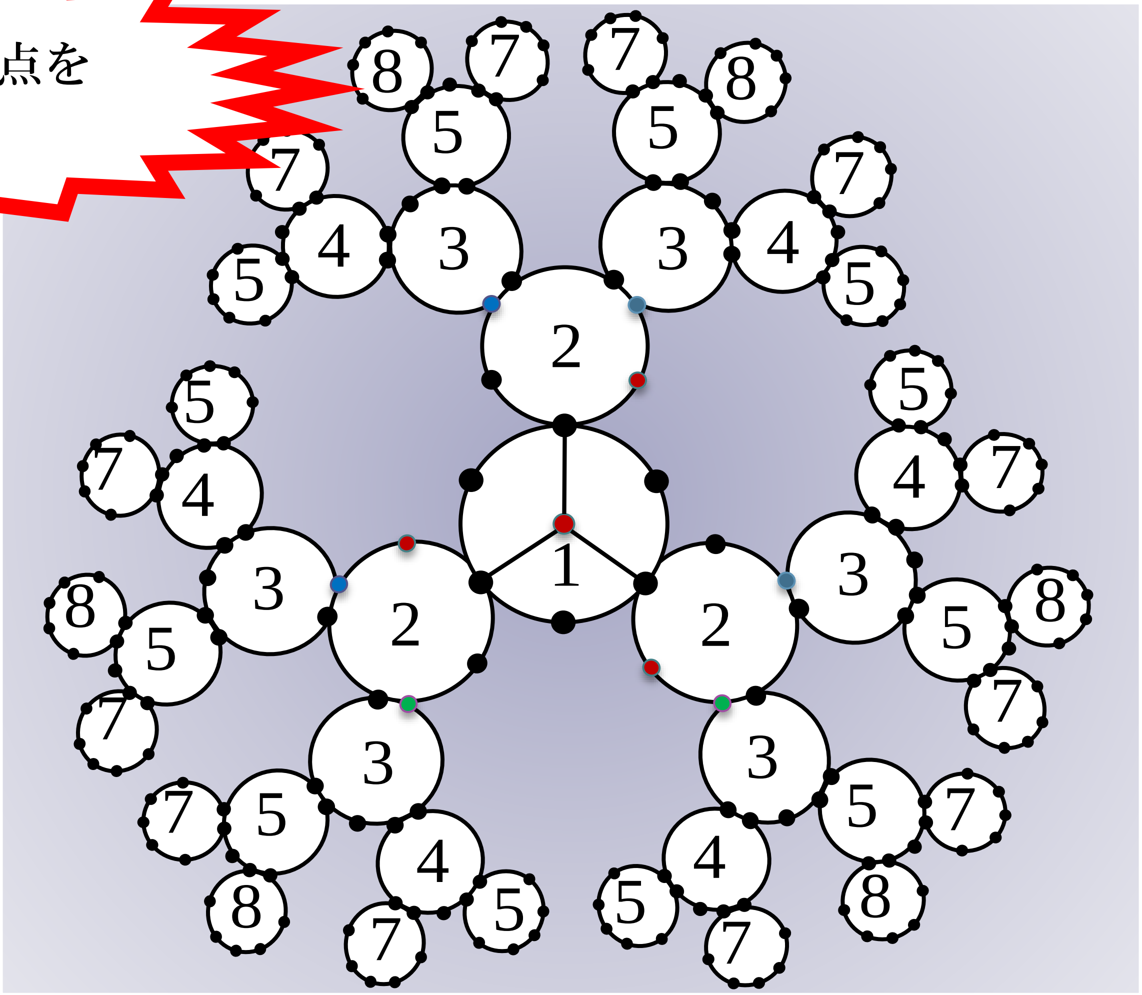
$$\begin{pmatrix}4\\4\\4\end{pmatrix} \to 1 \qquad \begin{pmatrix}8\\8\\8\end{pmatrix} \to 2$$

AK条件: index e をもつファレイ原子の全てのファレイ点についてそのすべての成分の値はe以下である.

全ての３次元ファレイ点をふくんでいる！！！



ファレイ原子構造

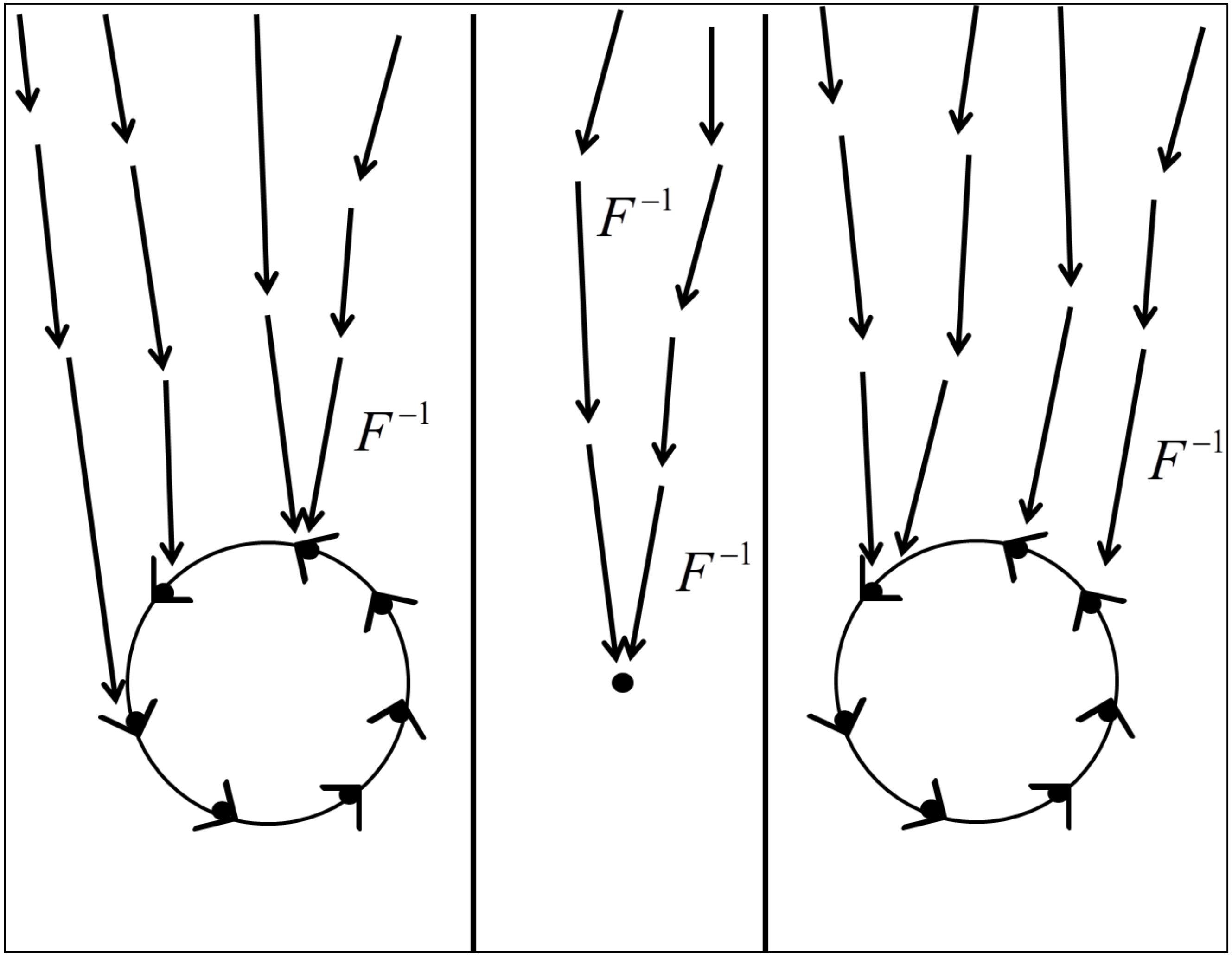


Very goodなファレイ結晶構造

n次元ファレイ生成行列

$$G_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & ⋰ & 1 & 1 \\ \vdots & ⋰ & ⋰ & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & ⋰ & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4次元ファレイ空間（イメージ）



各次元の基本ファレイ原子

次元	基本ファレイ原子の構成点の数	クラスの数
2	3	1
3	7	1
4	7	2
	1	1
5	31	1
6	63	1
7	15	8
	3	2
	1	1
8	15	16
	5	3
9	511	1