

# ある種の無理関数の マクローリン展開について

C-3-3 石井卓実

A decorative graphic consisting of several horizontal lines of varying lengths and colors (teal, white, and light blue) extending from the right side of the slide.

# ある公式

$$\alpha_n = \frac{\left\{ (m-1) + \frac{n-(m-1)}{n} \right\} \left\{ (m-1) + \frac{(n-1)-(m-1)}{n} \right\} \dots \left\{ (m-1) + \frac{1-(m-1)}{1} \right\}}{m^n}$$

# 無理関数, マクローリン展開とは

- 無理式で表された関数

- (例) $y=\sqrt{x}$   
 $\sqrt{2x-1}$  etc...

- 無限回微分可能な関数 $f(x)$ について

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \end{aligned}$$

と表せること

# ある関数とは

- $\sqrt[m]{1+x+x^2+\dots+x^n+\dots}$  のこと
- この関数のマクローリン展開を見つける

## m=2のとき

$$\bullet \sqrt[2]{1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} + \frac{5x^3}{16} + \dots + \alpha_n x^n + \dots$$

↓

$$\alpha_n = \frac{\left\{1 + \frac{n-1}{n}\right\} \left\{1 + \frac{(n-1)-1}{(n-1)}\right\} \dots \left\{1 + \frac{1-1}{1}\right\}}{2^n}$$

## m=3のとき

$$\bullet \sqrt[3]{1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots} = 1 + \frac{x}{3} + \frac{2x^2}{9} + \frac{3x^3}{81} + \dots + \alpha_n x^n + \dots$$

↓

$$\alpha_n = \frac{\left\{2 + \frac{n-2}{n}\right\} \left\{2 + \frac{(n-1)-2}{(n-1)}\right\} \dots \left\{2 + \frac{1-2}{1}\right\}}{3^n}$$

## m=4のとき

$$\bullet \sqrt[4]{1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots} = 1 + \frac{x}{4} + \frac{5x^2}{32} + \frac{15x^3}{128} + \dots + \alpha_n x^n + \dots$$

↓

$$\alpha_n = \frac{\left\{3 + \frac{n-3}{n}\right\} \left\{3 + \frac{(n-1)-3}{(n-1)}\right\} \dots \left\{3 + \frac{1-3}{1}\right\}}{4^n}$$

# これらを今回の関数で表すと

- $\sqrt[m]{1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots} = 1 + \dots \alpha_n x^n + \dots$

↓

$$\alpha_n = \frac{\left\{ (m-1) + \frac{n-(m-1)}{n} \right\} \left\{ (m-1) + \frac{(n-1)-(m-1)}{(n-1)} \right\} \dots \left\{ (m-1) - \frac{1-(m-1)}{1} \right\}}{m^n}$$

この公式を使うことで、マクローリン展開を表せる



# 感想

- もともと、マクローリン展開のひとつに

$\alpha$  を実数としたとき,

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots$$

の関数があり、その関数を応用して、新しく発見できるかと思い、研究した結果、うまく見つけた