ある種の無理関数の
マクローリン展開について

C-3-3　石井卓実

ある公式

$$\alpha_n = \frac{\left\{(m-1)+\frac{n-(m-1)}{n}\right\}\left\{(m-1)+\frac{(n-1)-(m-1)}{n}\right\}\dots\left\{(m-1)+\frac{1-(m-1)}{1}\right\}}{m^n}$$

無理関数,マクローリン展開とは

- 無理式で表された関数
- (例)y=√x
  √2x-1 etc…

- 無限回微分可能な関数f(x)について

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots\cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots\cdots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

と表せること

ある関数とは

- $\sqrt[m]{1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots}$のこと
- この関数のマクローリン展開を見つける

m=2のとき

- $\sqrt[2]{1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots} = 1+\frac{x}{2}+\frac{3x^2}{8}+\frac{5x^3}{16}+\cdots+\alpha_n\, x^n+\cdots$

$$\downarrow$$

$$\alpha_n = \frac{\left\{1+\frac{n-1}{n}\right\}\left\{1+\frac{(n-1)-1}{(n-1)}\right\}\ldots\left\{1+\frac{1-1}{1}\right\}}{2^n}$$

m=3のとき

- $\sqrt[3]{1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots} = 1+\frac{x}{3}+\frac{2x^2}{9}+\frac{3x^3}{81}+\cdots+\alpha_n\, x^n+\cdots$

$$\downarrow$$

$$\alpha_n = \frac{\left\{2+\frac{n-2}{n}\right\}\left\{2+\frac{(n-1)-2}{(n-1)}\right\}\ldots\left\{2+\frac{1-2}{1}\right\}}{3^n}$$

m=4のとき

- $\sqrt[4]{1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots} = 1+\frac{x}{4}+\frac{5x^2}{32}+\frac{15x^3}{128}+\cdots+\alpha_n\, x^n+\cdots$

$$\downarrow$$

$$\alpha_n = \frac{\left\{3+\frac{n-3}{n}\right\}\left\{3+\frac{(n-1)-3}{(n-1)}\right\}\ldots\left\{3+\frac{1-3}{1}\right\}}{4^n}$$

これらを今回の関数で表すと

- $\sqrt[m]{1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots} = 1+\cdots\alpha_n\, x^n+\cdots$

$\downarrow$

$$\alpha_n = \frac{\left\{(m-1)+\frac{n-(m-1)}{n}\right\}\left\{(m-1)+\frac{(n-1)-(m-1)}{(n-1)}\right\}\ldots\left\{(m-1)-\frac{1-(m-1)}{1}\right\}}{m^n}$$

この公式を使うことで、マクローリン展開を表せる

感想

- もともと、マクローリン展開のひとつに

α を実数としたとき，

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\cdots\cdots$$

の関数があり、その関数を応用して、新しく発見できるかと思い、研究した結果、うまく見つけれた