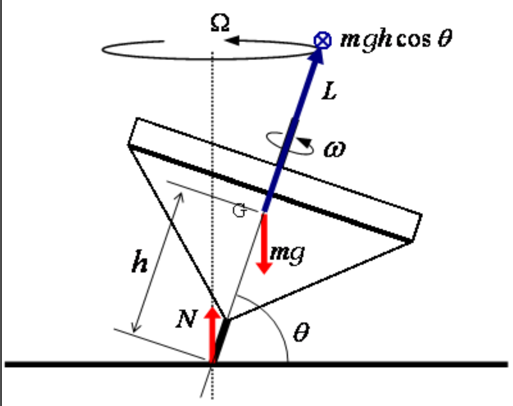
独楽の軸の形状と回転の関係

How does the axis shape affect the spinning of a top?

S-3 飯田 将弘, 影山 一揮 M-3 三上 拡, 福富 友麻 C-3 丹下 博道

概要 戸田盛和著「コマの科学」を輪講し、コマの力学を学んだ。コマの軸下端が丸い時床面から受ける摩擦力によるトルクのため、回転軸が直立することの説明があった。我々は、コマの軸の太さや、曲率半径とコマの回転運動の関係を調べることにした。軸先端に大きさの異なるビー玉を取り付け運動の様子を調べた。軸先端の半径の異なるコマを作製して運動を調べた。さらに、軸先端が平らなコマは軸が直立すると回転が不安定になって軸が振動する。この運動を高速度ビデオで解析した。

1）通常のコマの場合



軸下端が鋭いコマ

軸下端が鋭いということで、厳密には異なるが、左図のように地面に接触する部分が点であると定義する。
また、実際にコマを回転させると移動しながら回転するが、接触部は固定されているものとする。

軸下端が鋭いものは、角運動量ベクトルに対してコマに働く重力によるトルクが軸を倒す方向に継続的に加わる結果、自転の角運動量ベクトルが大きさを変えずに向きだけ回転するため、歳差運動を続ける。この運動はつまり、角運動量 Lの方向が変化し周期運動を行っているということである。

上図において、コマの質量を m, 重力加速度を g, コマの重心の高さを h, 軸の傾きを θ, コマ自身の角速度を ω, 歳差運動における角速度を Ωとして、歳差運動の周期を求める。

周期は、上図中の角運動量 Lの先端が移動する円の円周を、単位時間当たりにおけるトルクで除算することで求められる。
まず円周が

$$2\pi L\cos\theta$$

で求められる。また、単位時間当たりのトルクは $mgh\cos\theta$

により求められる。これらより、

$$\frac{2\pi L\cos\theta}{mgh\cos\theta}=\frac{2\pi}{\Omega}$$

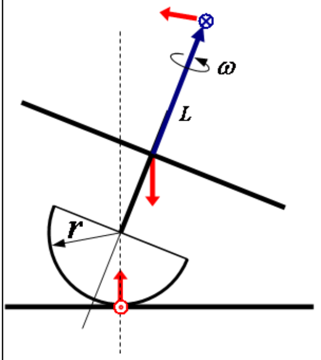
なる。また、これより

$$\Omega=\frac{mgh}{L}$$

という式が得られる。
この式から、以下のことが言える。

・コマ自身の回転が速いほど、ゆっくり歳差運動をする
・軸の傾きに依存しない
・重心が高いほど速く歳差運動をする

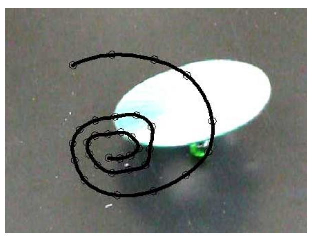
2）軸の下端が丸い場合



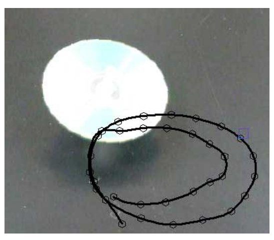
軸下端が丸いこま

現実のこまは軸下端が丸まっているのが普通である．円を描きながら直立する現象が観察される．
これは軸下端での摩擦によるトルクのためである．これに重力による歳差運動が重なり，円を描く運動をする．

床との接点の軌跡



ビー玉径17mm



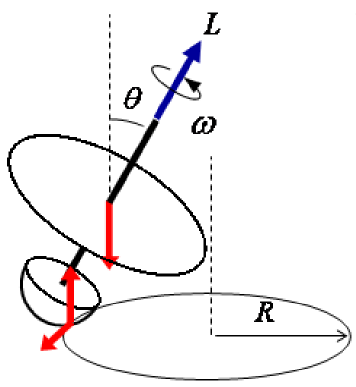
ビー玉径29mm

滑らない時の運動

軸下端が滑らないと仮定したときの描く円の半径を計算した．実際には滑りがあるのでこれより小さな半径の円を描くと推測される．

軸下端半径rが大きいほど描く円の半径Rが大きく直立するまでに時間がかかることがわかった．
回転ゆでたまごの場合も，丸い方を下にすると尖った方を下にする時より直立に時間がかかることが観察される．

$r<h$ の場合逆回りになる（こまの回転軸が描く円の外向き）．
$h=r$では重力によるトルクが０なのでLが保存される．そのためこまは傾きを変えずに直進する．



トルクと角運動量の関係式群

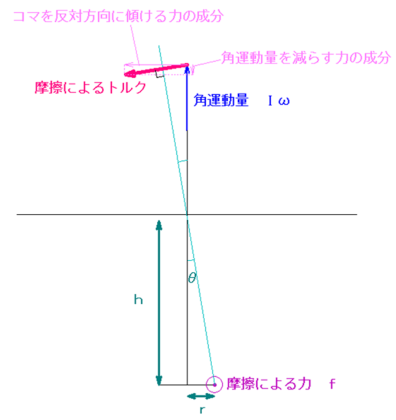
$$d=h\sin\theta-r\sin\theta$$

$$\frac{2\pi\, L\sin\theta}{mgd}=T$$

$$r\sin\theta\,\omega T=2\pi\, R$$

$$R=\frac{rI\omega^2\sin\theta}{mg(h-r)}$$

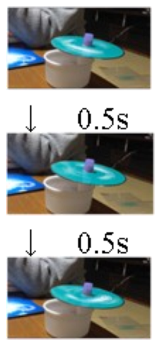
3）軸の下端が平らな場合



軸下端が平らである程度の大きさの半径があるとき、コマを回転させると安定には回らず軸ががたがたと振動することが観察される。

この軸の振動の原因は、軸下端が丸いコマで軸が直立するの同じ機構と考えられる。

摩擦力によるトルクで軸がほぼ直立した状態でも，軸下端が丸い場合と異なり，平らであると摩擦によるトルクは０にならない．そのため軸を直立させるトルクが効きすぎて軸が反対側に傾いてしまう。



反対側に傾くと同じ原因で摩擦によるトルクが逆に働き、これを繰り返すために軸ががたがたと振動することになる。
また、摩擦によるトルクの軸方向成分はコマの角運動量と反対の方向なので回転を弱めることになる。

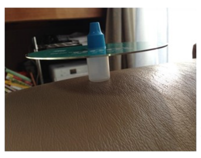
理論上は上記の通りと考えられるが、ホントに摩擦によってガタガタなっているのかを確認するため、摩擦のほぼない氷の上で回して振動の様子を調べた。左の写真のようにコマは軸が振動することはなく回った。氷の上では摩擦は小さい。氷の上で回すと、摩擦によるトルクはなく、重力によるトルクのみが働く。

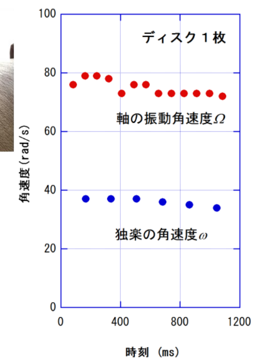
以上の結果から軸の振動は摩擦のためと確認できた。

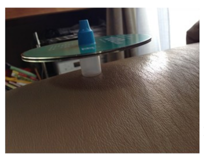
次に円板の質量を変えて回転にどのような影響があるかを調べた。

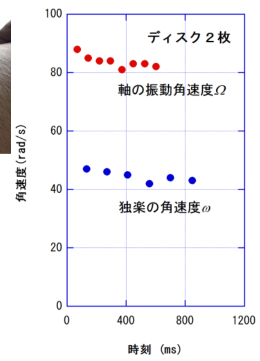
重量を変えた２つのコマを作り軸の振動の周期とコマの回転周期を計測した。具体的には、高速度ビデオで回転状態を撮影し、再生しながら軸が一回振動する時間（軸振動周期）とコマが一回転する時間（コマの回転周期）を時刻の関数として読みとった。

測定に使用したこまのサンプルは写真に示すようにＣＤをプラスチック容器の蓋と本体の間に挟み込んだものである。挟み込むCDの枚数が1枚のものと2枚のものを用意して軸周りの慣性モーメントを変化させた。ちなみに底の半径は１cm，ＣＤ一枚の質量が１６ｇ，軸の部品の質量が３ｇである。









実験結果はCDが一枚でも二枚でも軸振動周期とコマの回転周期の比に差はないというものだった。同じ回転周期のとき、軸振動周期は質量に依存しないようである。

軸振動周期を厳密に求めることは困難なので角運動量とトルクの比から推定する。計算に用いた値は以下の通り。
h=3cm , R=6cm, ω=40rad/s, μ =0.1, r=1cm

実測値は T＝0.08s なので、推定値より桁違いに周期が短い。計算のモデルが現実と大きく異なっているためであると考えられる。たとえば、動摩擦が一定でないなども考えられる。

$$T\approx\frac{I\omega}{M_f+Mg}=\frac{R^2/2\times\omega}{\sqrt{h^2+r^2}\times\mu g+rg}=0.59\mathrm{s}$$ ：軸振動周期の目安

まとめ
一言でコマと言っても様々なコマが存在する。その中でも軸の下端の形状が違うものの回転の仕方の違いについて解析的に説明することができた。