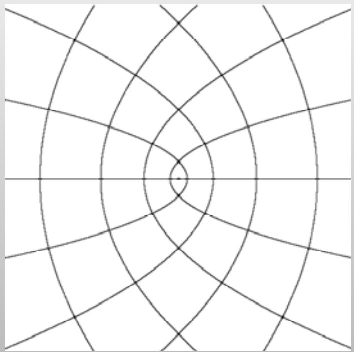
k-ピタゴラス数の代数と幾何学

津山工業高等専門学校

菅原孝慈（情報工学科２年）
野山由貴（情報工学科２年）
草地弘幸（電子制御工学科１年）

もくじ

＊第1章　ピタゴラス数の幾何学的研究の動機



$a^2+b^2=c^2$をみたすピタゴラス数を線でむすんだ図

交点に注目すると,2つの曲線が直交しているようにみえる.
これらは本当に直交しているのだろうか・・・.
そう思いながら研究を始めた.

課題
$x^2+ky^2=z^2$をみたす
xy平面上の点(x,y)を研究せよ.
(交点についていろいろ調べる)

＊第2章　ピタゴラス数の代数的研究の動機

$$P=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 2\\ -2 & -1 & 2\\ -2 & -2 & 3\end{pmatrix}$$

「ピタゴラス数を生み出す行列のはなし」を読んで
すべてのピタゴラス数が、１つの行列で生成されることを知った.
(左は，本に出てくるピタゴラス行列である.）
では，$a^2+kb^2=c^2$の場合はどうだろう？

＜我々がたてた問題＞
$a^2+kb^2=c^2$をみたすk-ピタゴラス数(a,b,c)を
生成する行列を発見し、研究せよ.

＊第3章　代数的極小元の幾何学的考察の概要

代数的研究により，$k-$ピタゴラス数には
極小元が存在することがわかった.
これらの極小元が幾何学的にどのような
意味をもつのかが，今後の課題となった.
この章では現在の研究で得られた予想を扱う.

＊第１章　ピタゴラス数の幾何学

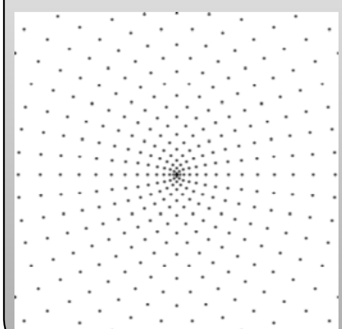
§1ピタゴラス点と放物線の図

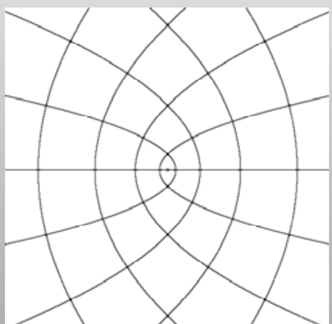
t,wをパラメータをして
(t,wは互いに素で,
片方が奇数で，もう片方が偶数)

$$\begin{cases}x=t^2-w^2\\ y=2tw\\ z=t^2+w^2\end{cases}$$

と表せる.

まず最初に$x^2+y^2=z^2$を$\left(\frac{x}{z}\right)^2+\left(\frac{y}{z}\right)^2=1$とする。
それを円の方程式$X^2+Y^2=1$に置き換え
$Y=m(X+1)$を代入することにより
左の各式を得る.
また，得た各式を使いプログラムを作成,
その結果，xy平面上で以下のような図を得た.





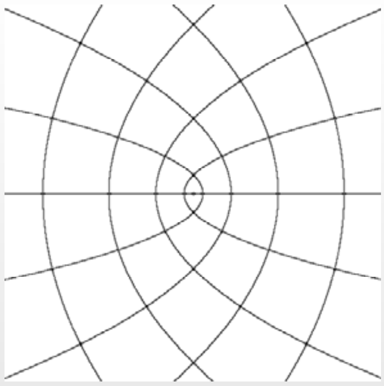
放物線のようなものがみえる(左).
放物線どうしが直角に交わっている
ようにみえる(左).
では，本当に直角なのだろうかと疑問に
思い研究を進めた.

＜ xy 平面における放物線 ＞

$C_t : y^2 = -4t^2(x - t^2)$

$C_w : y^2 = 4w^2(x + w^2)$

という2つのタイプの
放物線族 C_t, C_w を得る．



定理1 C_t と C_w はすべての交点で直交する。

(証明)
C_tの $x = a$ における微分係数は、

$y'(a) = \dfrac{-2t^2}{b}$ で、これを m_1 とする．

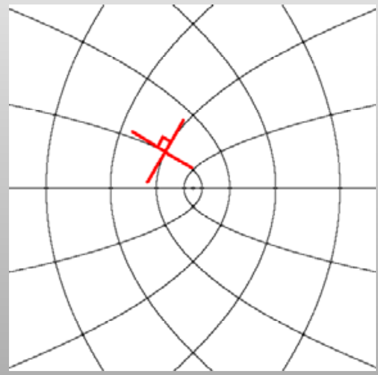
C_wの $x = a$ における微分係数は

$y'(a) = \dfrac{2w^2}{b}$ で、これを m_2 とする．

$m_1 \cdot m_2 = \dfrac{-4t^2w^2}{b^2} = \dfrac{-4t^2w^2}{(2tw)^2} = -1$ より

C_t を C_w の点(a, b)における接線は互いに直行する．
(証明終)

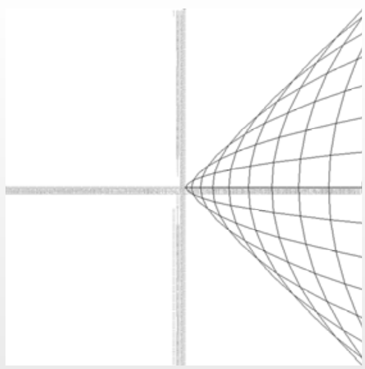
$\Downarrow$



＜ yz 平面における放物線 ＞

$C_t : y^2 = 4t^2(z - t^2)$

$C_w : y^2 = 4w^2(z - w^2)$



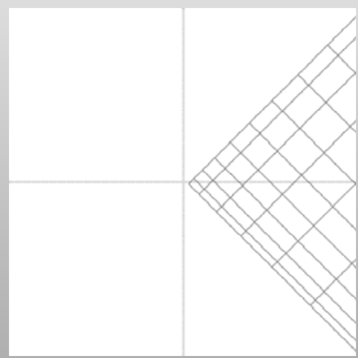
定理2 C_tとC_wの交点において, それぞれの接線の傾きをm_t、m_wとすると $m_t \cdot m_w = 1$となる.

（定理1と同様に証明できる．）

＜ xz 平面における直線 ＞

$L_t : z = -x + 2t^2$

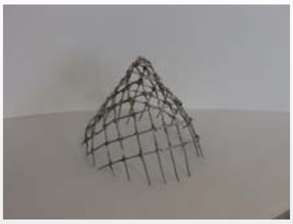
$L_w : z = x - 2w^2$



定理3 L_t と L_w はすべての交点で直交する.

（傾きから証明は明らか．）

§ピタゴラス点の幾何学的模型



ピタゴラス数の正体について知りたく，我々は各平面の図を利用し，独自に模型を作り上げた．その結果，ピタゴラス点（座標がピタゴラス数となっている点）は円錐上の放物線の交点であることがわかった．

xy平面方向の写真

yz平面方向の写真

xz平面方向の写真

§$k-$ピタゴラス数の幾何学における研究方針

これまでは, ピタゴラス数についての研究を進めてきた．その結果，2つの放物線が交わるとき，その交点でこれらの放物線の関係が数値的に得られた．そこで，我々は$k \geq 2$のときの$k-$ピタゴラス数においても，なんらかの放物線族が得られ，ピタゴラス数のときと同様な現象が起こるのではないかと考えた．

§$k-$ピタゴラス数$(x^2+ky^2=z^2)$の研究$(k \geq 2)$

t, wは互いに素で，片方が奇数で，もう片方が偶数

パターン1
$$\begin{cases} x = t^2 - kw^2 \\ y = 2tw \\ z = t^2 + kw^2 \end{cases}$$

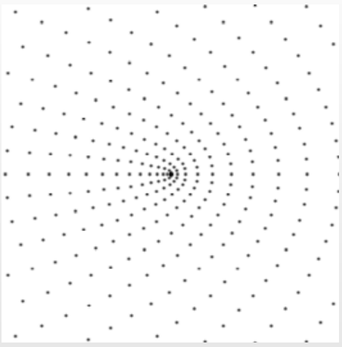
パターン2
$$\begin{cases} x = kt^2 - w^2 \\ y = 2tw \\ z = kt^2 + w^2 \end{cases}$$

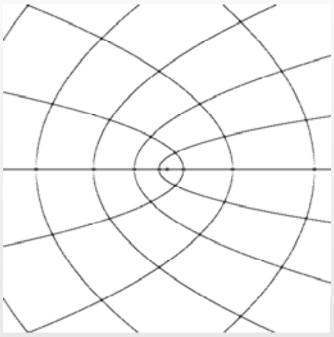
さらに$k \geq 3$が奇数のとき，t, wはともに奇数で, 互いに素として

パターン3
$$\begin{cases} x = \dfrac{t^2 - kw^2}{2} \\ y = tw \\ z = \dfrac{t^2 + kw^2}{2} \end{cases}$$

パターン4
$$\begin{cases} x = \dfrac{kt^2 - w^2}{2} \\ y = tw \\ z = \dfrac{kt^2 + w^2}{2} \end{cases}$$

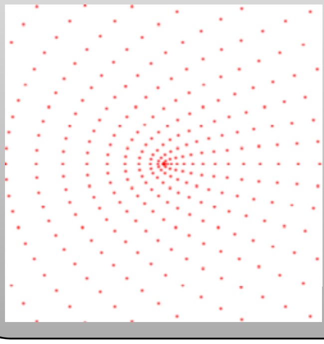
(例) $k=2$の場合 ($x^2+2y^2=z^2$) の調査 (2つのパターン)

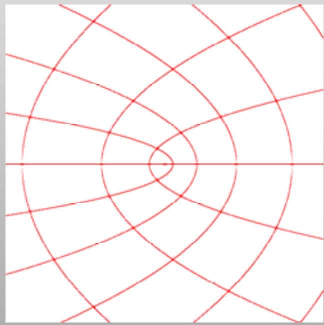


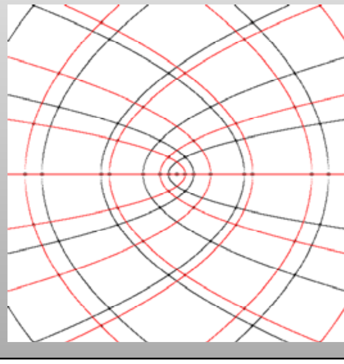


パターン1(黒)は左側に，
パターン2(赤)は右側に
視点が向き，放物線族が
1方向しか見えない.
しかし，線にして表示する
ことによって2方向の放物線族が
見られる.

また，2つの放物線が交わるとき，
そこに法則性が存在すると思えた.







< xy 平面 >

パターン1
$$\begin{cases} C_t : y^2 = \dfrac{-4t^2}{k}(x-t^2) \\ C_w : y^2 = 4w^2(x+kw^2) \end{cases}$$

パターン3
$$\begin{cases} D_t : y^2 = t^2(2x+kw^2) \\ D_w : y^2 = -\dfrac{2w^2}{k}\left(x-\dfrac{w^2}{2}\right) \end{cases}$$

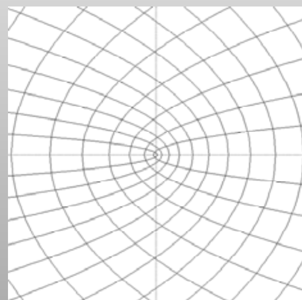
パターン2
$$\begin{cases} \widetilde{C}_t : y^2 = -4t^2(x-kt^2) \\ \widetilde{C}_w : y^2 = \dfrac{4w^2}{k}(x+w^2) \end{cases}$$

パターン4
$$\begin{cases} \widetilde{D}_t : y^2 = -2t^2\left(x-\dfrac{kw^2}{2}\right) \\ \widetilde{D}_w : y^2 = \dfrac{2w^2}{k}\left(x+\dfrac{w^2}{2}\right) \end{cases}$$

定理4　C_t と C_w の交点における接線の傾きを m_t, m_w と すると $m_t \cdot m_w = -\dfrac{1}{k}$

$\widetilde{C}_t$ と $\widetilde{C}_w$，　D_t と D_w，　$\widetilde{D}_t$ と $\widetilde{D}_w$ の場合も同様の定理となる.

(定理1と同様に証明できる.)



＜ yz 平面 ＞

パターン1 $\begin{cases} C_t : y^2 = \dfrac{4t^2}{k}(z - t^2) \\ C_w : y^2 = 4w^2(z - kw^2) \end{cases}$

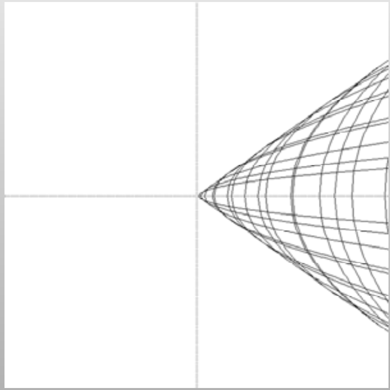
パターン3 $\begin{cases} D_t : y^2 = \dfrac{t^2}{2}(z - \dfrac{t^2}{2}) \\ D_w : y^2 = 2w^2(z - \dfrac{kw^2}{2}) \end{cases}$

パターン2 $\begin{cases} \widetilde{C}_t : y^2 = 4t^2(z - kt^2) \\ \widetilde{C}_w : y^2 = \dfrac{4w^2}{k}(z - w^2) \end{cases}$

パターン4 $\begin{cases} \widetilde{D}_t : y^2 = 2t^2(z - \dfrac{kt^2}{2}) \\ \widetilde{D}_w : y^2 = \dfrac{2w^2}{k}(z - \dfrac{w^2}{2}) \end{cases}$

> 定理5
> C_tとC_wの交点において、それぞれの接線の傾きを
> m_t、m_wとすると$m_t \cdot m_w = \dfrac{1}{k}$となる.

$\widetilde{C}_t$と$\widetilde{C}_w$, D_tとD_w, $\widetilde{D}_t$と$\widetilde{D}_w$の場合も
同様の定理となる.
(定理1と同様に証明できる.)



＜ xz 平面 ＞

パターン1 $\begin{cases} L_t : z = x - 2kt^2 \\ L_w : z = -x + 2w^2 \end{cases}$

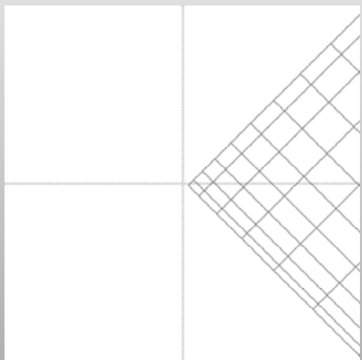
パターン3 $\begin{cases} l_t : z = x - kt^2 \\ l_w : z = -x + w^2 \end{cases}$

パターン2 $\begin{cases} \widetilde{L}_t : z = x - 2t^2 \\ \widetilde{L}_w : z = -x + 2kw^2 \end{cases}$

パターン4 $\begin{cases} \tilde{l}_t : z = x - t^2 \\ \tilde{l}_w : z = -x + kw^2 \end{cases}$

> 定理6
> L_tとL_wはすべての交点で直交する.

$\widetilde{L}_t$と$\widetilde{L}_w$, l_tとl_w, $\tilde{l}_t$と$\tilde{l}_w$も同様の定理となる.
(傾きから証明は明らか.)



＊ 第 2 章　ピタゴラス数の代数学

§ピタゴラス行列について（予備知識）

$P=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$を，ピタゴラス行列、または$P$行列という.

命題１　$P^{-1}=P$

既約ピタゴラス数 $\mathbf{v}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$に対して(3つの分身)　$\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix} -a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2=\begin{pmatrix} -a \\ -b \\ c \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3=\begin{pmatrix} a \\ -b \\ c \end{pmatrix}$を考える.

※既約ピタゴラス数とは、a,b,cが互いに素(最大公約数が１)なものをいう.

命題２　$P\mathbf{v}_i\ (i=1,2,3)$は既約ピタゴラス数である.

命題３　Pはすべてのピタゴラス数を生成する行列である.

以上のことが、「ピタゴラス数を生み出す行列のはなし」（小林吹代　著）で扱われていた.

§k－ピタゴラス数の代数学における研究方針

ピタゴラス行列を使うと，ピタゴラス数$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$から全ての

ピタゴラス数を生成できることを知った.

これから，我々の研究対象であるk－ピタゴラス数についても，

全てのk-ピタゴラス数に関係するk－ピタゴラス行列の存在を

示し，その構造を研究することを進めた.

§$k-$ピタゴラス数（$k\geq 2$）の研究

$a^2+kb^2=c^2$をみたすa,b,cは, aとcが奇数、bが偶数のとき、以下の式で表わされる.

パターン1$\begin{cases} a=t^2-kw^2 \\ b=2tw \\ c=t^2+kw^2 \end{cases}$　パターン2$\begin{cases} a=kt^2-w^2 \\ b=2tw \\ c=kt^2+w \end{cases}$

$k=1$ならば$a+b-c>0$(ピタゴラス数)となり,
$k\geq 2$ならば$a+b-c>0$とは限らない(例:$k=2$のとき$(7, 40, 57)$).

さらに、$k\geq 3$の奇数のときは､を奇数として、以下の式で表わされる.

パターン3$\begin{cases} a=\dfrac{t^2-kw^2}{2} \\ b=tw \\ c=\dfrac{t^2+kw^2}{2} \end{cases}$　パターン4$\begin{cases} a=\dfrac{kt^2-w^2}{2} \\ b=tw \\ c=\dfrac{kt^2+w}{2} \end{cases}$

この場合も$a+b-c>0$とは限らない(例:$k=3$の奇数のとき(1, 15, 26)).

§$k-$ピタゴラス行列

我々の研究は $a^2+kb^2=c^2$ をみたす自然数の組 (a,b,c)
すなわち、すべての既約 k-ピタゴラス数を生成する行列を研究することである.

$$P_k := \begin{pmatrix} -2k+1 & -2k & 2k \\ -2 & -1 & 2 \\ -2k & -2k & 2k+1 \end{pmatrix}$$

を k-ピタゴラス行列、または単に P_k 行列という.
（今回の研究で，このP_k行列を発見した.）

$\boxed{\text{定理 1}\quad P_k^{-1}=P_k}$

（証明）実際に計算　$P_k^2=E$からわかる.（証明終）

$\mathbf{v}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$を$k-$ピタゴラス数とし$\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix} -a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2=\begin{pmatrix} -a \\ -b \\ c \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3=\begin{pmatrix} a \\ -b \\ c \end{pmatrix}$とする.

$\boxed{\text{定理２}\quad P_k\mathbf{v}_i\left(i=1,2,3\right)\text{は既約}\,k-\text{ピタゴラス数である.}}$

（証明）$P_k\mathbf{v}_1$ を考える.

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2k+1 & -2k & 2k \\ -2 & -1 & 2 \\ -2k & -2k & 2k+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2k\left(a-b+c\right)-a \\ 2(a-b+c)+b \\ 2k\left(a-b+c\right)+c \end{pmatrix}$$

$x=a-b+c$ とおくと、

$$\begin{aligned} a'^2+kb'^2 &= 4k^2x^2-4kxa+a^2+4kx^2+4kxb+kb^2 \\ &= 4k^2x^2+4kx\left(x-a+b\right)+c^2 \\ &= 4k^2x^2+4kxc+c^2 \\ &= c'^2 \end{aligned}$$

$\mathbf{v}_2$，$\mathbf{v}_3$ の場合も同様に証明できる.

既約性について（証明の続き）

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(2k-1) & -2k & 2k \\ -2 & -1 & 2 \\ -2k & -2k & 2k+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2k-1)a-2kb+2kc \\ 2a-b+2c \\ 2ka-2kb+(2k+1)c \end{pmatrix}$$

$\left(a',b',c'\right)$を基本変換する.（以下，R_j は j 行を意味する。）

$$\xrightarrow[-(R_3-kR_2)]{-(R_1-kR_2)} \begin{pmatrix} a+kb \\ 2a-b+2c \\ kb-c \end{pmatrix} \xrightarrow[R_1-R_3]{} \begin{pmatrix} a+c \\ 2a-b+2c \\ kb-c \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_2-2R_1]{} \begin{pmatrix} a+c \\ b \\ kb-c \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-kR_2]{} \begin{pmatrix} a+c \\ b \\ c \end{pmatrix} \xrightarrow[R_1-R_3]{} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$P_k\begin{pmatrix} -a \\ -b \\ c \end{pmatrix}, P_k\begin{pmatrix} a \\ -b \\ c \end{pmatrix}$ の既約性も同様に示される.（定理２の証明終）

$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ を k-ピタゴラス数とする.

$P_k^{-1} = P_k$ より $\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = P_k \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ とおくと, $\begin{pmatrix} |a'| \\ |b'| \\ c' \end{pmatrix}$ は, また k-ピタゴラス数となる.

このとき、次の命題が成り立つ.

命題4　$a+b-c \leq 0$ ならば、$a' > 0, b' > 0, c' > 0$ で、さらに、$a'+b'-c' \geq 0$ が成り立つ.

(証明)

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(2k-1) & -2k & 2k \\ -2 & -1 & 2 \\ -2k & -2k & 2k+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(2k-1)a - 2kb + 2kc \\ -2a - b + 2c \\ -2ka - 2kb + (2k+1)c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2k(a+b-c) + a \ (>0) \\ -2(a+b-c) + b \ (>0) \\ -2k(a+b-c) + c \ (>0) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} a'+b'-c' &= -2k(a+b-c) + a - 2(a+b-c) + b + 2k(a+b-c) - c \\ &= -(a+b-c) \geq 0 \end{aligned}$$

命題5　$a+b-c>0$ ならば $|a'|<a, |b'|<b, c'<c$

(証明)

まず $c'<c$ を示す.

$c - c' = c - \{-2ka - 2kb + (2k+1)c\} = 2k(a+b-c) > 0$

次に $|a'|<a$ を示す.

$a' > 0$ のとき

$a - a' = a - \{(-2k+1)a - 2kb + 2kc\} = 2k(a+b-c) > 0$

$a' < 0$ のとき

$a + a' = a + \{(-2k+1)a - 2kb + 2kc\} = 2a - 2k(a+b-c)$

証明の続き

（ケース1）

$a=t^2-kw^2, b=2tw, c=t^2+kw^2$ のとき

$a+b-c=-2kw^2+2tw$ であるので，

$a+a'=2t^2+(4k-2)kw^2-4ktw$

$=2(t-kw)^2+(2k-2)w^2>0$

（ケース2）

$a=kt^2-w^2, b=2tw, c=kt^2+w^2$ のとき

$a+b-c=-2w^2+2tw$ であるので，

$a+a'=2kt^2+(4k-2)w^2-4ktw$

$=2k(t-w)^2+(2k-2)w^2>0$

証明の続き

さらに、$k\geq 3$ の場合

（ケース3）

$a=\dfrac{t^2-kw^2}{2}, b=tw, c=\dfrac{t^2+kw^2}{2}$ のとき

$a+b-c=-kw^2+t$ であるので，

$a+a'=t^2+(4k-1)kw^2-2ktw$

$=(t-kw)^2+(k-1)w^2>0$

（ケース4）

$a=\dfrac{kt^2-w^2}{2}, b=tw, c=\dfrac{kt^2+w^2}{2}$ のとき

$a+b-c=-w^2+tw$ であるので，

$a+a'=kt^2+(2k-1)w^2-2ktw$

$=k(t-w)^2+(k-1)w^2>0$

証明の続き

最後に $|b'| < b$ を示す.

$b \geq 0$ の場合.

$$b - b' = b - \{-2a - b + 2c\}$$
$$= 2(a + b - c) > 0$$

$b < 0$ の場合.

$$b + b' = b + \{-2a - b + 2c\}$$
$$= 2(c - a) > 0$$

（命題5の証明終）

§ K −ピタゴラス数同士の大小関係

定義1　X を k −ピタゴラス数全体とし, $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in X$ とする.

$P_k \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$ について, $\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a_1| \\ |b_1| \\ c_1 \end{pmatrix} \in X$ とおく. このことを, $|P_k| \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ と表す.

さらに, $|P_k| \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'' \\ b'' \\ c'' \end{pmatrix}$ のとき, $|P_k|^2 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'' \\ b'' \\ c'' \end{pmatrix}$ と表す. 以下, 帰納的に

$|P_k|^n \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ を定義する.　　$|P_k|^0 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ とする.

定義2　X を $k-$ピタゴラス数全体とし, $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} \in X$ とする.

$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ であるとは, $a+b-c>0$ であって,

ある非負の整数 n が存在して $|P_k|^n \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ のときをいう.

定義２は，命題5より，$a+b-c>0$ のとき $|a'|<a, |b'|<b, c'<c$ であることをもとに定義した.

また，命題４より $a+b-c \leq 0$ となる $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ が極小元となることは,

定義２から明らかである.

定理3　$(X, \leq)$ の極小元は,

$a+b-c \leq 0$ となる $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ であるか, $a+b-c>0$ であるものは,

$\begin{pmatrix} 4k-1 \\ 4 \\ 4k+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\alpha^2(\alpha+1) \\ 2\alpha+1 \\ 2\alpha^2(\alpha+1)+\alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\alpha^2(\alpha-1) \\ 2\alpha-1 \\ 2\alpha^2(\alpha-1)+\alpha \end{pmatrix}$ である.

ただし，$\alpha = \sqrt{k}$ $(k \geq 4$ は平方数$)$ である.

(証明)

$a+b-c>0$ の場合を示せば十分である.

極小元を $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ とし，$\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = P_k \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ とする.　命題5より, $\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \alpha \end{pmatrix}$ の

いずれかしかない.

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=P_k\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=P_k\begin{pmatrix}4k-1\\4\\4k+1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0\\1\\\alpha\end{pmatrix}=P_k\begin{pmatrix}2\alpha^2(\alpha+1)\\2\alpha+1\\2\alpha^2(\alpha+1)+\alpha\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0\\-1\\\alpha\end{pmatrix}=P_k\begin{pmatrix}2\alpha^2(\alpha-1)\\2\alpha-1\\2\alpha^2(\alpha-1)+\alpha\end{pmatrix}$$ である.

$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\\alpha\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\\alpha\end{pmatrix}$ は $k-$ピタゴラス数ではない.

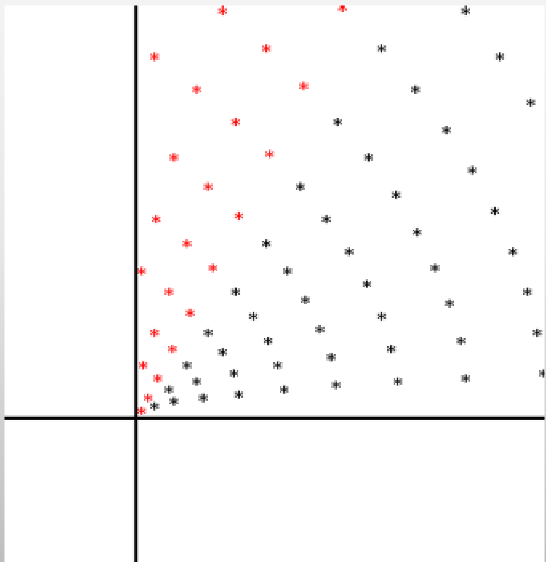
よって、, $a+b-c>0$の場合の極小元は,

$\begin{pmatrix}4k-1\\4\\4k+1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\alpha^2(\alpha+1)\\2\alpha+1\\2\alpha^2(\alpha+1)+\alpha\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\alpha^2(\alpha-1)\\2\alpha-1\\2\alpha^2(\alpha-1)+\alpha\end{pmatrix}$ しかない. （証明終）

（注意）$k=1$のときは$a+b$-$c>0$なので, $\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$ しかないことがわかる.

＊第3章　代数的極小元の幾何学の考察

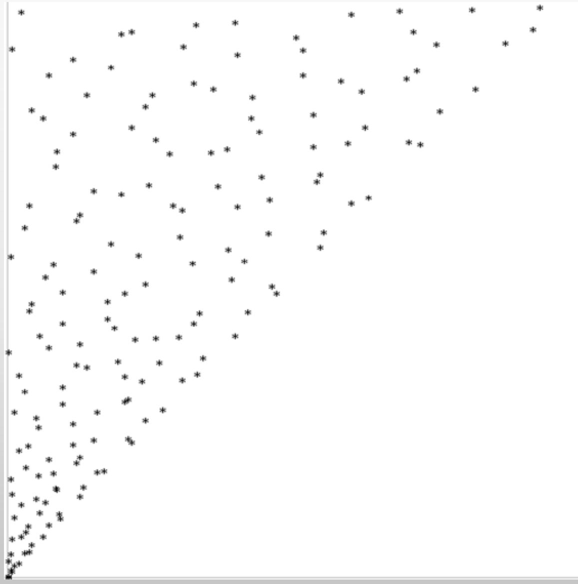
§ $k=2$の場合の極小元の図とリスト



(7,4,9)
(7 , 40 ,57),(1 , 70 , 99),(23 , 84 ,121)
(17 ,126 , 179),(47 , 144 , 209),(7 , 176 , 249)
(41 , 198 , 283),(79 , 220 , 321),(31 , 260 , 369)
(73 , 286 , 411),(17 , 330 , 467),(119 , 312 , 457)
(113 , 390 ,563),(49 ,442 ,627),(167 ,420 , 617)
(103 , 476 , 681),(31 , 532 , 753),(161 , 510, 739)
(89 , 570 , 811),(223 , 544 , 801),(151 , 608 , 873)
(217 , 646 , 939) ,(287 , 684 , 1009)　　など

$k=2$のときの$a+b-c\le 0$をみたす点(赤色)の図(xy平面)

§ $k = 3$の場合の極小元のリスト



$k = 3$のときの$a + b - c \le 0$をみたす点の図（xy平面）

yが偶数の場合

(11 , 4 , 13)

(11, 24, 43), (23, 40, 73), (11, 80, 139)

(59, 84, 157), (83, 112, 211), (47, 140, 247)

(71, 176, 313), (23, 208, 361), (143, 180, 343)

(47, 252, 439), (179, 220, 421), (131, 260, 469)

(167, 308, 559), (263, 312, 601), (311, 364,703)

yが奇数の場合

(1, 15, 26), (13, 35, 62), (13,77,134)

(61, 99, 182), (37, 117, 206), (97, 143, 266)

など

§ 放物線上のk-ピタゴラス極小点

放物線 $C_t : y^2 = 4t^2(z - t^2)$ 上のk-ピタゴラス極小点が
どのように配置しているかを問題とした.
調査の結果，以下の予想を得ている.

予想1
各tについて，C_t 上のk-ピタゴラス点の個数は

(1)　tがkの倍数の場合，$\left[\dfrac{t}{\sqrt{k}} \right] - \dfrac{t}{k} + 1$

(2)　tがkの倍数でない場合，$\left[\dfrac{t}{\sqrt{k}} \right] - \dfrac{t}{k}$

予想2
kが偶数の場合，k-ピタゴラス極小点の範囲は，$y \ge \dfrac{2x}{k-1}$ である.

＜さらなる展望＞

現在，$a^2+b^2+c^2=d^2$をみたす自然数解（3 次元ピタゴラス数）の変換の研究も行っている．我々の考えている変換は，$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$を 3 次元ピタゴラス数として，

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} + \frac{2}{a+d} \begin{pmatrix} 2bc \\ b(b+c) \\ c(b+c) \\ 2bc \end{pmatrix}$$

というものであり，このとき，$\begin{pmatrix} |a'| \\ |b'| \\ |c'| \\ d' \end{pmatrix}$は，再び 3 次元ピタゴラス数となる．我々は$n$次元ピタゴラス数の変換への一般化を研究する上で，上の式を非常に重要視している．実際，n次元ピタゴラス数に関する上の変換の一般式も得ており，n次元ピタゴラス数の変換理論に発展させるストーリーも考えている．まずは，3 次元ピタゴラス数の変換理論を完全に構築することが，当面の中心課題である．